

NEOKLASSISCHE DIFFUSION IN EINEM  
AXIALSYMMETRISCHEN VOLLIONISIERTEN  
PLASMA BEI MITTLEREN UND  
HOHEN STOSSFREQUENZEN

Kurt Borraß

---

1974

---







Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41554601\\_0007](https://archive.org/details/IA41554601_0007)

NEOKLASSISCHE DIFFUSION IN EINEM AXIALSYMMETRISCHEN VOLL-  
IONISIERTEN PLASMA BEI MITTLEREN UND HOHEN STOSFREQUENZEN.

INAUGURAL DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES DOKTOR-  
GRADES DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK DER  
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN.

VORGELEGT VON

KURT BORRAS

MÜNCHEN

1973



1 Berichterstatter: Prof. Dr. D. Pfirsch

2 Berichterstatter: Prof. Dr. G. Süßmann

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Mai 1974

## Inhaltsverzeichnis

|       |                                                                                                       |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 0:    | Einleitung                                                                                            | 1  |
| 0:1   | Definition des physikalischen Systems                                                                 | 1  |
| 0:2   | Qualitative Theorie der neoklassischen Diffusion                                                      | 2  |
| 0:3   | Diskussion bisheriger Platearechnungen und eigene Aufgabenstellung                                    | 9  |
| 1:    | Die kinetische Gleichung                                                                              | 14 |
| 2:    | Lösung der kinetischen Gleichung                                                                      | 25 |
| 2:1   | Elimination des azimuthalen E-Feldes und Separation der Winkel-<br>abhängigkeit                       | 25 |
| 2:2   | Die Randbedingungen in $v_{\parallel}$ und Lösungen durch Entwicklung nach<br>Legendreschen Polynomen | 26 |
| 2:4   | Lösung des Gleichungssystems der Koeffizienten, Kettenbruch-<br>darstellung für $a_0$                 | 30 |
| 2:4:1 | Die Funktion $H_{n,m}$ und ihre Eigenschaften                                                         | 30 |
| 2:4:2 | Die Funktion $F_{n,m}$ und ihre Eigenschaften                                                         | 33 |
| 2:4:3 | Darstellung von $a_0$ durch $F_3/F_4$ mittels der Randbedingung                                       | 36 |
| 2:4:4 | Kettenbruchdarstellung für $F_3/F_4$                                                                  | 39 |
| 3:    | Berechnung des Diffusionskoeffizienten                                                                | 41 |
| 3:1   | Darstellung von D durch die Funktion $S_2$                                                            | 41 |

|     |                                 |    |
|-----|---------------------------------|----|
| 3:2 | Berechnung von $S_2$            | 48 |
| 4:  | Zusammenfassung                 | 53 |
| A1: | Numerische Berechnung von $S_2$ |    |

### Zusammenfassung

Wir bestimmen eine Lösung der Driftkinetischen Gleichung unter Verwendung des Lorentzgas-Stoßterms, die im Plateaugebiet, im Stoßdominierten Bereich und dem Gebiet zwischen beiden Bereichen gilt. Selbstkonsistente elektrische Felder werden exakt berücksichtigt.

Für den Diffusionskoeffizienten  $D$  erhalten wir im gesamten Bereich eine analytische Darstellung mittels einer Funktion  $S_2(\alpha)$ .  $S_2$  ist als Kettenbruch gegeben, der in Grenzfällen analytisch und allgemein numerisch ausgewertet wird.  $D(\sqrt{\phantom{x}})$  wächst im ganzen Bereich monoton mit  $\sqrt{\phantom{x}}$ . Im Plateaubereich ist der Anstieg sehr schwach. Der Übergang zum Pfirsch-Schlüter-Bereich ist ausgeprägt.

Das azimutale elektrische Feld kommt in dem Ausdruck für  $D$  nicht mehr vor. Man erhält daher dasselbe Ergebnis, wenn man es von vorneherein unberücksichtigt läßt.

## Hinweise zur Nomenklatur:

Soweit nichts anderes vermerkt ist, verwenden wir die in diesem Zusammenhang üblichen Bezeichnungen und Abkürzungen.

Bezüglich der Theorie der Kettenbrüche halten wir uns an die Terminologie von [14].

Für die Indizierung der Teilchenart verwenden wir folgende Regel:

Nichtindizierte Größen beziehen sich stets auf Elektronen.

Ionengrößen werden immer durch den Index  $i$  gekennzeichnet.

Elektronen gelegentlich, falls es zur Klarheit beiträgt, durch den Index  $e$ .

Wir benutzen durchgängig die Definition  $\Omega = \frac{|e| B}{c m}$  für die Gyrofrequenz.

## 0: Einleitung

### 0:1 Definition des physikalischen Systems

In dieser Arbeit untersuchen wir die neoklassische Diffusion in einem vollionisierten, axialsymmetrischen Plasma bei mittleren und hohen Stoßfrequenzen.

Das Magnetfeld, das einen stationären Zustand ermöglicht, wird durch die magnetostatischen Gleichungen beschrieben.

$$0:1 \quad \nabla \mathcal{L} = 0 \quad \nabla \times \mathcal{L} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathcal{L}$$

In dem betrachteten Plasma sollen die Toroidizität  $\xi$  (=Plasmaradius/Torusradius), das Verhältnis des poloidalen zum toroidalen Feld und  $\beta = 8\pi P_B/2$  klein sein.

Dann können die Gleichungen 0:1 durch eine Entwicklung nach  $\xi$  gelöst werden und man findet: [15]

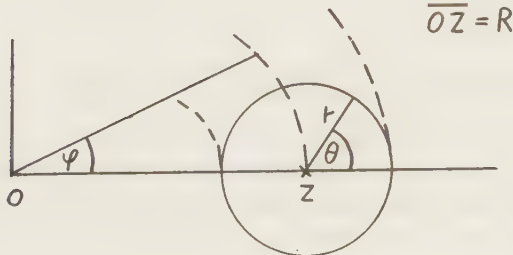
Die magnetischen Flächen sind bis zur Ordnung  $\xi$  ineinandergeschachtelte, nichtkonzentrische Kreise. Die Verschiebung der Mittelpunkte ist von der Ordnung  $\xi$ .

Das legt die Verwendung des folgenden, in diesem Zusammenhang gebräuchlichen Modellfeldes nahe, das in toroidalen Koordinaten gemäß Abb. 1 die Form

$$0:2 \quad \mathcal{L} = (0, B_\theta, B_\varphi) \quad \text{hat, wobei} \quad B_\varphi = \frac{B_0}{1 + \xi \cos \theta}$$

$$\text{und} \quad B_\theta = \Theta(r) B_\varphi \quad \xi = \frac{r}{R} \quad \xi \approx \Theta$$

Abb. 1



Das toroidale Feld  $B_\varphi$  ist das Feld eines Stromes in Richtung der Symmetrieachse.

Das poloidale Feld  $B_\theta$  versteht das Feld mit einer Rotations-transformation  $\mathcal{L}(t) = 2\pi \theta / \varepsilon$ .  $B_\theta$  ist durch  $\text{Div } \mathcal{L} = 0$  und die Forderung bestimmt, daß die poloidalen Feldlinien Kreise um die Seele sind. [1]

Anschaulich bedeutet die Verwendung des Modells 0:2 die Annahme, daß der Strom, der  $B_\theta$  erzeugt, nicht mit dem Plasma wechselwirkt. In diesem Sinne werden wir  $\mathcal{L}$  stets als Vakuumfeld behandeln und das toroidale elektrische Feld, das zur Erzeugung dieses Stromes eigentlich erforderlich ist, vernachlässigen.

Es wird angenommen, daß  $\varepsilon$  so klein ist, daß die Plasmaströme das Magnetfeld nicht beeinflussen. Sie sind dann durch  $\nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathcal{L}$  bestimmt, wobei für  $\mathcal{L}$  0:2 einzusetzen ist. Sie sind von der Ordnung  $\varepsilon$  gegenüber dem Strom, der wegen

$$\nabla \times \mathcal{L} = (0, 0, \frac{B_0}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{r \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right\})$$

zur Erzeugung des poloidalen Feldes erforderlich ist.  $\nabla \times \mathcal{L} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  ist also nicht mehr erfüllt.

Wegen  $\varepsilon \ll 1$  ist

$$0:3 \quad |\mathcal{L}| = B = B_0 (1 - \varepsilon \cos \theta) + O(\varepsilon^2)$$

Wir beschränken uns im folgenden auf die erste Ordnung in  $\varepsilon$ .

## 0:2 Qualitative Theorie der neoklassischen Diffusion

Wir wollen die radiale Diffusion in einem solchen Plasma für gewisse Werte der Stoßfrequenz untersuchen. Es ist zweckmäßig, sich zunächst einen allgemeinen qualitativen Überblick mittels der bekannten Abschätzungsformel

$$0:4 \quad D \sim \delta r^2 \gamma$$

( $\delta r$  die radiale Verschiebung zwischen zwei Stößen.  $\gamma$  die effektive Stoßfrequenz)

für den Diffusionskoeffizienten zu verschaffen. Um die radiale Verschiebung  $\delta r$  zwischen zwei Stößen zu bestimmen, müssen wir die Teilchenbahnen näher betrachten.

Die Bewegung eines Teilchens in dem zu grunde gelegten Magnetfeld kann zerlegt werden in die Bewegung längs der Feldlinien, die Gyrationbewegung um die Feldlinien und eine Driftbewegung senkrecht zum Magnetfeld auf Grund des Magnetfeldgradienten, der Magnetfeldlinienkrümmung und eventueller elektrischer Felder. Im Falle eines starken Magnetfeldes, bei dem ( $l, T$  eine charakteristische Länge bzw. Zeit des Systems;  $\Omega = |e|B/mc$  die Gyrofrequenz,  $V_t/\Omega = \rho$  der Gyroradius)  $\ell \gg \rho$  und  $T \gg \Omega^{-1}$ , kann man über die schnelle Gyration mitteln und die Bewegung sogenannter "guiding center" betrachten. (Driftnäherung) Wir tun dies im folgenden fast durchweg, werden jedoch Einfachheit halber meist von Teilchen reden, wenn wir "guiding center" meinen.

Die Bewegungsgleichung für ein "guiding center" lautet:

$$0:5 \quad \frac{dW}{dt} = V_{||} \tau_0 + W_D \quad \tau_0 = \frac{\mathcal{L}}{B}$$

wobei  $W_D$  die Driftgeschwindigkeit ist.

Wir vernachlässigen toroidale elektrische Felder, so daß die Energie/Masseneinheit  $\mathcal{E} = \frac{V_{||}^2}{2} + e\phi/m$  Konstante der Bewegung ist. (Siehe

Kapitel 1: ;  $\phi$  das selbstkonsistente elektrische Potential)

Eine weitere (adiabatische) Bewegungskonstante ist das magnetische Moment (pro Masseneinheit)  $\mu = V_{\perp}^2/2B$ . Mit  $\mathcal{E}$  und  $\mu$  können wir  $v_{||}$  durch

$$0:6 \quad V_{||} = \sqrt{2(\mathcal{E} - \mu B - e\phi/m)}$$

darstellen.

Von jetzt an werden wir für den Rest dieses Kapitels elektrische Felder vernachlässigen. ( $\phi = 0$ )

Aus 0:6 entnimmt man dann, daß sich ein "guiding center" in dem effektiven Potential  $m\mu B$  bewegt. Auf Grund der Toroidizität ist B auf der Innenseite des Torus größer als außen. ( $B = B_0 (1 - \xi \cos \theta)$ ) Hinreichend langsame Teilchen, nämlich solche für die  $V_{||}(\theta) = 0$  für gewisse  $\theta$ , sind in der dadurch entstehenden Potentialmulde gefangen. Man sieht leicht, daß ein Teilchen genau dann gefangen ist, wenn:

$$0:7 \quad \frac{V_{0||}^2}{V_{0\perp}^2} < \xi \quad V_{0||} = V_{||}(\theta=0) \quad V_{0\perp} = V_{\perp}(\theta=0)$$

Daraus folgt:

Der Bruchteil der gefangenen Teilchen ist von der Ordnung  $\sqrt{\xi}$  und Es ist  $V_{||} \sim \sqrt{\xi} V_t$  ( $V_t$  = thermische Geschwindigkeit) für ein (thermisches) gefangenes Teilchen.

Wir kehren nun zu 0:5 zurück. Die Komponenten bezüglich unseres Koordinatensystems lauten mit dem expliziten Ausdruck für die Driftgeschwindigkeit: (siehe Kapitel I:)

$$0:8 \quad \frac{dr}{dt} = \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2/2}{\Omega R} \sin \theta$$

$$0:9 \quad r \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2/2}{\Omega R} \cos \theta + \Theta V_{||}$$

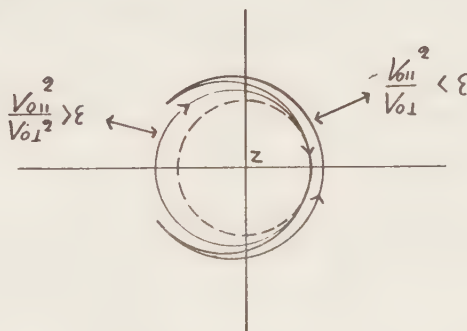
$$\text{Wegen } \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2/2}{\Omega R} / \Theta V_{||} \sim \frac{r}{R} \frac{\xi}{\Theta} \ll 1$$

kann der Driftterm in 0:9 vernachlässigt werden und man erhält aus 0:8 und 0:9

$$0:10 \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2/2}{\Omega R} \gamma \frac{\sin \theta}{V_{||} \Theta}$$

Die Lösungen von 0:10 sind die Teilchenbahnen in der Projektion auf einen Torusquerschnitt. Es sind angenähert exzentrische Kreise für umlaufende Teilchen und "Bananen" für gefangene Teilchen. [ 2 ]  
Siehe Abb. 2

Abb. 2



0:10 ermöglicht es, die radiale Verschiebung, die ein Teilchen bei einem Umlauf erfährt, abzuschätzen.

Mit  $V_{||} \sim V_{\perp} \sim V_t$  folgt für ein umlaufendes Teilchen:

$$0:11 \quad \Delta r \sim g \frac{\xi}{\Theta}$$

Für gefangene Teilchen ist  $V_{||} \sim \sqrt{\epsilon} V_{\perp}$ ,  $V_{\perp} \sim V_t$  so daß:

$$0:12 \quad \Delta r \sim g \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Theta}$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zur Auswertung von 0:4 zurück.

In dem betrachteten System erfahren Teilchen radiale Verschiebungen

auf Grund der Gyration um die Feldlinien und der Drift.

Für die Gyration gilt  $\Delta t \sim \rho$  und der resultierende Diffusionskoeffizient ist:

$$0:13 \quad D_K \sim \rho^2 \nu$$

Diese sogenannte klassische Diffusion ist unabhängig von der Magnetfeldstruktur. Die Diffusion, die von der Driftbewegung herührt und die wie die Driftgeschwindigkeit von der Magnetfeldstruktur abhängt, bezeichnet man als neoklassische Diffusion. Mit ihr werden wir uns im folgenden befassen.

Die Frequenz  $\omega$ , mit der ein Teilchen um den Torus herumläuft bzw. eine Bananenbahn durchläuft, ist von der Ordnung  $\theta V_{ti}/r$   
Also ist:

$$\omega_u \sim \theta V_{ti}/r \quad \text{für ein umlaufendes}$$

und

$$\omega_g \sim \frac{\sqrt{E} \theta k}{r} \quad \text{für ein gefangenes Teilchen. Es ist } \omega_g < \omega_u.$$

In realen Plasmen kann  $\gamma$  sowohl größer als auch kleiner als  $\omega_u$  bzw.  $\omega_g$  sein. Für Teilchen, die periodische Bahnen der Dicke  $\Delta r$  mit der Frequenz  $\omega$  durchlaufen, ist das  $\delta t$ , das in 0:4 einzusetzen ist, durch

$$\alpha) \delta t = \Delta t \quad \text{gegeben, falls } \gamma \ll \omega$$

und durch

$$\beta) \delta t = \Delta t \frac{\omega}{\gamma} \quad \text{gegeben, falls } \gamma \gg \omega$$

Wir haben also verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Wir nehmen zunächst an,  $\gamma$  sei so klein, daß auch gefangene Teilchen vollständige Bananenbahnen durchlaufen. Da die effektive Stoßfrequenz eines gefangenen Teilchens von der Ordnung  $\gamma V_{\perp}^2 / V_{\parallel}^2 \sim \frac{\gamma}{\varepsilon}$  ist, bedeutet dies:

$$0:14 \quad \frac{\gamma}{\varepsilon} \ll \omega_g = \sqrt{\varepsilon} \frac{\Theta V_t}{r} \text{ bzw. } \gamma \ll \frac{\Theta V_t \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{r} = \gamma_1$$

Mit dem Wert 0:12 für  $\Delta t = \delta t$  (Fall A) ergibt sich dann der Beitrag der gefangenen Teilchen zur (neoklassischen) Diffusion, wenn man noch berücksichtigt, daß ihr Anteil  $\sqrt{\varepsilon}$  ist und  $\gamma/\varepsilon$  die effektive Stoßfrequenz, zu:

$$0:15 \quad D_B \sim \gamma \vartheta^2 \left( \frac{\varepsilon}{\Theta} \right)^2 \varepsilon^{-\frac{3}{2}}$$

Analog erhält man für den Beitrag der umlaufenden Teilchen

$$D \sim \gamma \vartheta^2 \left( \frac{\varepsilon}{\Theta} \right)^2 \quad \text{In diesem Bereich tragen also praktisch}$$

nur gefangene Teilchen zur Diffusion bei. (Bananenbereich)

Nun nehmen wir an  $\gamma_{eff} \gg \omega_u > \omega_g$ . Das heißt, da  $\gamma \sim \gamma_{eff}$  für umlaufende Teilchen:

$$0:16 \quad \gamma \gg \frac{\Theta V_t}{r} = \gamma_2$$

Nunmehr haben wir den Fall B) und es ist  $\delta t \sim \vartheta \frac{\varepsilon}{\Theta} \frac{\gamma_2}{\gamma}$ . Somit:

$$0:17 \quad D \sim \gamma_2 \vartheta^2 \left( \frac{\varepsilon}{\Theta} \right)^2 \frac{\gamma_2}{\gamma}$$

In Wirklichkeit werden die Verhältnisse jedoch dadurch komplizierter,

daß ein azimutales elektrisches Feld existiert, das eine zusätzliche radiale Drift bewirkt. Der resultierende radiale Teilchenstrom gibt einen zusätzlichen Beitrag

$$0:18 \quad D \sim \gamma \, \vartheta^2 \left( \frac{\varepsilon}{\Theta} \right)^2$$

zur Diffusion, der dominierend ist. [1]

Die beiden Frequenzen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  definieren einen Bereich  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ , in dem besondere Verhältnisse vorliegen.

Für eine erste Abschätzung sehen wir wieder von elektrischen Feldern ab und vernachlässigen gefangene Teilchen indem wir annehmen  $V_{||} \approx \text{const}$  (unabh. von  $\theta$ )

Zu jedem  $\gamma$ ,  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$  gibt es ein  $V_{||}^0$ , so daß  $\gamma = \omega^0 = \theta V_{||}^0 / r$ . Für alle Teilchen ist dann entweder  $V_{||}^0 < V_{||}$  oder  $V_{||}^0 > V_{||}$ .

Wir betrachten zunächst Teilchen mit  $V_{||} < V_{||}^0$ . Für solche Teilchen liegt der stoßdominierte Fall B) vor und die Diffusion ist durch 0:17 gegeben. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß der Bruchteil solcher Teilchen nur  $V_{||}^0 / V_1 \sim V_{||}^0 / V_t \sim \gamma / \gamma_2$

ist, so daß wir schließlich erhalten:

$$0:19 \quad D_P \sim \frac{\gamma}{\gamma_2} \gamma_2 \, \vartheta^2 \left( \frac{\varepsilon}{\Theta} \right)^2 \frac{\gamma_2}{\gamma} = \gamma_2 \, \vartheta^2 \left( \frac{\varepsilon}{\Theta} \right)^2$$

Der Beitrag der Teilchen mit  $V_{||} > V_{||}^0$  ergibt sich mit  $\delta t \sim \Delta t \sim \vartheta \varepsilon / \Theta$ , wenn man noch berücksichtigt, daß ihr Anteil  $\sim 1 - \frac{V_{||}}{V_1} \sim 1$  ist für nicht zu großes  $V_{||}$ , zu:

$$D \sim \gamma \, \vartheta^2 \left( \frac{\varepsilon}{\Theta} \right)^2$$

Für  $\gamma / \gamma_2 \ll 1$  kann man ihn vernachlässigen.

0:19 hängt nicht von  $\gamma$  ab. Der Bereich  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$  wird daher auch als Plateaubereich bezeichnet. In dieser Arbeit werden wir uns speziell mit der Plateaudiffusion und dem Übergang zum Stoßdominierten Bereich

befassen.

### 0:3 Diskussion bisheriger Platearechnungen und eigene Aufgabenstellung

Eine strenge Behandlung des Diffusionsproblems erfordert die Lösung einer kinetischen Gleichung. Wir werden wie üblich die sogenannte Driftkinetische Gleichung für die "guiding center"-Verteilungsfunktion  $f = f(r, \theta, V_{||}, V_{\perp})$  in einer Entwicklung nach dem kleinen Parameter  $\rho/r$  ( $\rho = V_{te}/\Omega$  der Gyroradius,  $r \sim$  Plasmaradius) benutzen. Sie lautet (siehe Kapitel 1:!) in erster Ordnung in  $\rho/r$ :

$$0:20 \quad \frac{V_{||} \theta}{r} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \theta} - \frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \frac{V_{\perp}^2 \varepsilon \tilde{B}_0}{2 V_{||} B} \sin \theta \right] +$$

$$\frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2}{2 \Omega R} \frac{B_0}{B} \sin \theta \frac{\partial f_0}{\partial r} = \frac{\delta f_1}{\delta t} \Big|_{\text{coll}} \quad f_0 = \frac{n_0(r)}{(2\pi V_{te}^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{V^2}{2V_{te}^2}}$$

(Dabei haben wir, wie bisher in diesem Kapitel, selbstkonsistente elektrische Felder nicht berücksichtigt)

Im Bananen bzw. Stoßdominierten Bereich können die Terme in 0:20 nach Potenzen von  $V$  bzw.  $1/V$  geordnet werden, so daß man die Gleichung nach  $V$  bzw.  $1/V$  entwickeln kann. Im Plateaubereich ist eine entsprechende Entwicklung unmöglich. Um trotzdem zu Lösungen zu kommen, sind bei der Behandlung der Plateaudiffusion stets vereinfachende Zusatzannahmen gemacht worden. [2] [4] [5] [6]

Diese Annahmen und ihr Verhältnis zueinander sollen jetzt näher betrachtet werden.

Annahme 1: Eine wichtige Annahme bei Platearechnungen besteht in der Vernachlässigung gefangener Teilchen. Das ist gerechtfertigt, wenn gefangene Teilchen zwischen zwei Stößen nur so kleine Teile einer Banane durchlaufen, daß  $\theta$  als konstant angesehen werden kann.

Auf Grund des vorhergehenden Abschnitts ergibt sich unmittelbar, daß die Bedingung dafür lautet:

$$0:21 \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} \ll 1$$

Die Existenz gefangener Teilchen ist eine Folge der  $\theta$  - Abhängigkeit von  $v_{||}$ . Die Vernachlässigung gefangener Teilchen bedeutet also die Vernachlässigung von  $\frac{\partial v_{||}}{\partial \theta}$ .

Bezüglich 0:20 hat dies die Konsequenz, daß der zweite Term verschwindet, denn es ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_{||}} \frac{\partial v_{||}}{\partial \theta} = - \frac{\partial f_1}{\partial v_{||}} \frac{v_{||}^2 B_0 \varepsilon}{2 B v_{||}} \sin \theta$$

In der so vereinfachten Gleichung kann die  $\theta$  - Abhängigkeit absepariert werden.

Annahme 2: Nun betrachten wir die Annahme, daß nur Teilchen mit

$v_{||} \ll V_1$  zur Plateaudiffusion beitragen, die ebenfalls gebräuchlich ist. Wir hatten oben festgestellt, daß Teilchen mit  $v_{||} \ll v_{||}^0$  ( $\gamma = \theta v_{||}^0 / v$ ) relevant für die Plateaudiffusion sind. Damit sind die Bedingungen  $v_{||} \ll V_1$  und  $v_{||}^0 \ll V_1$  äquivalent. Da nun  $\frac{v_{||}^0}{V_1} \sim \frac{v_{||}^0}{v_t} \sim \frac{\gamma}{\gamma_2}$  ist die Annahme  $v_{||} \ll V_1$  gleichbedeutend mit der Bedingung

$$0:22 \quad \frac{\gamma}{\gamma_2} \ll 1$$

Diese Annahme ist jeweils benutzt worden, um den Stoßterm zu vereinfachen. Wir müssen daher je nach der Wahl des Stoßtermmodells verschiedene Fälle unterscheiden.

Die erste Plateaurechnung findet sich in [2]. Dort wird Annahme 1 gemacht und  $\left( \frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{coll} = -\gamma f_1$  benutzt. Man kann dann 0:20 mit elementaren Methoden lösen und findet:

$$0:23 \quad f_1 = - \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2/2}{\Omega R} \frac{\partial f_0}{\partial r} \left\{ \sin \theta \frac{r}{r^2 + \left(\frac{\theta V_{||}}{r}\right)^2} - \cos \theta \frac{\theta V_{||}/r}{r^2 + (\theta V_{||}/r)^2} \right\}$$

Nur der erste Term trägt zur Diffusion bei. Man nimmt nun an:

$$0:24 \quad \frac{r}{r^2 + \left(\frac{\theta V_{||}}{r}\right)^2} = \frac{1}{r_2} \frac{\frac{r}{r_2}}{\left(\frac{r}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{V_{||}}{V_t}\right)^2} \approx \frac{1}{r_2} \delta \left( \frac{V_{||}}{V_t} \right)$$

Dis ist korrekt bis auf Terme der Ordnung  $r/r_2$ . Also wird Annahme 2 gemacht.

In [4] wird der Stoßterm durch das realistischere Lorentzgasmodell genähert:  $\left. \frac{\delta f_1}{\delta t} \right|_{\text{coll}} = r \frac{\partial}{\partial V_{||}} \left( \frac{V^2 - V_{||}^2}{2} \frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \right)$ . Mit Annahme 2

erhält man angenähert  $\frac{\partial}{\partial V_{||}} \left( \frac{V^2 - V_{||}^2}{2} \frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \right) \approx \frac{V^2}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial V_{||}^2}$

wodurch sich die kinetische Gleichung wesentlich vereinfacht.

Der Term  $-\frac{\theta V_{||}}{r} \frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \frac{V_{\perp}^2 B_0 \varepsilon}{2 B V_{||}} \sin \theta$  wird in [4] ohne

Kommentar weggelassen. (Annahme 1)

Ergänzend bemerken wir noch, daß in [6] Annahme 1 und 2 explizit gemacht werden.

In [3] hebt sich auf Grund einer inkonsistenten Entwicklung der Term, der die  $\theta$ -Abhängigkeit von  $v_{||}$  beschreibt heraus. (Annahme 1)

Stöße werden dort vernachlässigt. Die Vorschrift zur Behandlung der Divergenzen, die dadurch bei der Berechnung des radialen Teilchenflusses auftreten, sind jedoch völlig äquivalent der Benutzung des

Modells  $\left. \frac{\delta f_1}{\delta t} \right|_{\text{coll}} = -r f_1$  und der Annahme  $r \rightarrow 0$  (Annahme 2)

Das heißt in [2] [4] [5] und [6] werden Annahme 1 und 2 gleichzeitig gemacht.

Wir denken uns nun die Bedingungen  $\gamma_1/\gamma \ll 1$  und  $\gamma_2/\gamma \ll 1$  in dem Sinne präzisiert, daß

$$0:25 \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} \lesssim \delta \quad \text{und}$$

$$0:26 \quad \frac{\gamma}{\gamma_2} \lesssim \delta \quad \text{wobei } \delta \text{ eine gewisse kleine Zahl}$$

sei. Da  $\gamma_1 = \xi^{\frac{3}{2}} \gamma_2$  erfordert die Verträglichkeit von 0:25 und 0:26, daß  $\delta \geq \xi^{\frac{3}{4}}$

Damit die gleichzeitige Anwendung von Annahme 1 und 2 sinnvoll ist, muß sogar gelten:

$$0:27 \quad \delta \gg \xi^{\frac{3}{4}}$$

Dabei unterscheidet man dann zwischen einem Plateaubereich im engeren Sinne, definiert durch  $\gamma_1/\delta \lesssim \gamma \lesssim \delta \gamma_2$  und den Übergangsbereichen  $\gamma \lesssim \gamma_1/\delta$  und  $\gamma_2 \delta \lesssim \gamma$ .

Nun ist  $\xi$  im allgemeinen keine sehr kleine Größe, so daß ein  $\delta$ , das die Bedingung 0:27 erfüllt, erst recht nicht als klein anzusehen ist.

Bei der Lösung von 0:20 ist eine Entwicklung nach  $\xi$  unvermeidlich. Auf Grund des gesagten erscheint es dann sinnvoll,  $\delta \sim \xi^{\frac{3}{4}} \sim \xi$  zu wählen und den Plateaubereich in die beiden Gebiete  $\gamma_1/\gamma \lesssim \xi^{\frac{3}{4}}$  und  $\gamma/\gamma_2 \lesssim \xi^{\frac{3}{4}}$  aufzuteilen. Im ersten bzw. zweiten Fall kann man dann im Rahmen der schon gemachten Näherungen Annahme 1 bzw. 2 anwenden.

In dieser Arbeit werden wir den ersten Fall behandeln und nur Annahme 1 machen. Das bedeutet also, daß wir bei der Behandlung von 0:20 den zweiten Term vernachlässigen. Den Stoßterm werden wir durch das vollständige Lorentzgasmodell approximieren, das einerseits hinreichend realistisch ist, andererseits noch so einfach, daß analytische Lösungen möglich sind. Die Rechnung umfasst dann neben dem stoßdominierten und dem Übergangsbereich für hinreichend kleines  $\xi$  und  $\gamma$  auch den eigentlichen

Plateaubereich, wo wir unsere Rechnung mit den bisherigen Plateaurechnungen vergleichen können.

Wir haben Annahme 1 und 2 bisher hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf den Gültigkeitsbereich (bez.  $\gamma$ ) der kinetischen Gleichung diskutiert.

Annahme 2 führt noch zu einer weiteren Schwierigkeit. Wir werden später sehen, daß sich die für unser Problem relevanten Randbedingungen auf das Verhalten der Verteilungsfunktion  $f_1$  an der Stelle  $v_\perp = v$  beziehen. Lokale Lösungen um  $v_\perp = 0$  geben keine Möglichkeit die Randbedingungen anzuwenden.

Dieses Problem tritt insbesondere bei der Anwendung der Näherung auf den Lorentzgasstoßterm auf, da die resultierende Gleichung noch von 2-ter Ordnung ist. Sie wird üblicherweise durch Übergang zur Fouriertransformierten gelöst. [4] Das Verfahren führt zufällig zu einem eindeutigen Ergebnis, da die Fouriertransformierte nur für eine spezielle Lösung existiert, die aus diesem rein formalen Grunde gewählt wird.

Die vollständige Behandlung des vorliegenden Problems schließt die Berücksichtigung radialer und azimuthaler elektrischer Felder, die wir bei unseren bisherigen Überlegungen außer acht gelassen haben, ein. Das gilt insbesondere angesichts der Tatsache, daß das azimuthale Feld eine wesentliche Rolle im Stoßdominierten Bereich spielt. [1] [7] Die Bestimmung des azimuthalen Feldes erfordert die Auswertung der Neutralitätsbedingung in erster Ordnung in  $\delta/r$ , wozu wiederum die Ionenverteilungsfunktion bekannt sein müßte.

Glücklicherweise ist es jedoch möglich, das azimuthale elektrische Feld exakt zu berücksichtigen ohne es explizit ausrechnen zu müssen.

Azimutale elektrische Felder sind im Plateaubereich nur in [5] berücksichtigt. Aber abgesehen davon, daß dort die Annahmen 1 und 2 benutzt werden, stimmen wir hinsichtlich der Form der kinetischen Gleichung nicht mit [5] überein.

Insgesamt werden wir also den Diffusionskoeffizienten für alle Werte von  $\gamma$ , für die gefangene Teilchen vernachlässigt werden können (Annahme 1;  $\gamma \ll \gamma^*$ ) unter Berücksichtigung selbstkonsistenter elektrischer Felder berechnen. Damit umfasst die Rechnung den Plateaubereich im engeren Sinne, jedoch mit vollständiger Berücksichtigung elektrischer Felder und exakter Auswertung der Randbedingungen, das Übergangsgebiet zum Stoßdominierten Bereich, das für reale Plasmen gerade wichtig ist und noch nicht berechnet wurde, und den Stoßdominierten Bereich.

### 1: Die kinetische Gleichung

Als Folge der Impulserhaltung bei Stößen sind der radiale Ionen- und Elektronenfluss stets gleich. [4] Die Ambipolaritätsbedingung ist also automatisch erfüllt. Es genügt daher den Elektronenfluss zu berechnen.

Wir benutzen als kinetische Gleichung wie üblich die Driftkinetische Gleichung in einer Entwicklung nach dem kleinen Parameter  $\rho/r$ . ( $\rho$ =Gyroradius,  $r$ =Plasmaradius) Für unsere Darstellung ist es jedoch zweckmäßiger, statt der gebräuchlichen Variablen  $(\mu, \epsilon)$  die Variablen  $(V_{||}, V)$  zu verwenden. Die systematische Herleitung aus der Fokker-Planck-Gleichung ist vielfach beschrieben worden. Wir können uns daher auf die folgende etwas heuristische Darstellung beschränken und nur die Besonderheiten, die mit der speziellen Variablenwahl zusammenhängen, beschreiben.

In der Driftnäherung kann die Verteilungsfunktion  $f$  (für "guiding center") als Funktion der Variablen  $(r, \theta, \mu, \xi)$  betrachtet werden. (Keine  $\varphi$ -Abhängigkeit wegen der Axialsymmetrie)  $(r, \theta)$  die "guiding center"-Koordinaten;  $\mu = V_{\perp}^2/2B$  das magnetische Moment pro Masseneinheit;  $\xi = \frac{V_{||}^2}{2} + \mu B + \frac{e\phi}{m}$  die Teilchenenergie pro Masseneinheit;  $\phi$  das selbstkonsistente elektrische Potential) Dann gilt für  $f$ : [11]

$$\left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{coll} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{H} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt}$$

Da wir Gleichgewichte betrachten, ist  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  und  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  <sup>†</sup>.

Wir vernachlässigen toroidale elektrische Felder, so daß  $\xi$  eine Konstante der Bewegung ist. Da  $\mu$  eine adiabatische Konstante der Bewegung ist, haben wir also  $d\xi/dt = 0$  und  $d\mu/dt = 0$ .

†

Hinsichtlich einer systematischen Behandlung der Zeitabhängigkeit siehe [8]. Terme, die  $\partial/\partial t$  enthalten, kommen erst in höherer Ordnung in  $\rho/r$  vor als wir sie hier betrachten werden.

Schließlich ist für ein "guiding center":

$$\mathcal{H} = V_{||} \tau_0 + \mathcal{H}_D \quad \tau_0 = \frac{\mathcal{L}}{B}$$

Damit bekommen wir insgesamt:

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} \Big|_{\text{coll}} = V_{||} \tau_0 \nabla f + \mathcal{H}_D \cdot \nabla f$$

Nun ist: [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= \frac{\tau_0}{\Omega} \times \left[ \frac{e}{m} \mathcal{L} - V_{||}^2 (\tau_0 \cdot \nabla) \tau_0 - \frac{V_{\perp}^2}{2B} \nabla B \right] \\ &\approx \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2/2}{\Omega B} (\nabla B \times \tau_0) + \frac{1}{B^2} (\mathcal{L} \times \nabla \phi) \end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder toroidale elektrische Felder vernachlässigt und in Übereinstimmung mit Kapitel 0:1 Terme, die  $\nabla \times \mathcal{L}$  enthalten, unberücksichtigt gelassen.

Es ist:

$$\nabla B \times \tau_0 = \left( \frac{B_0}{R} \sin \theta, \frac{B_0}{R} \cos \theta, -\theta \frac{B}{R} \cos \theta \right)$$

und

$$\mathcal{L} \times \nabla \phi = \left( -\frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi, B \frac{\partial}{\partial r} \phi, -\theta B \frac{\partial}{\partial r} \phi \right)$$

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned}
 \omega_0 \cdot \nabla f &= \left( \frac{v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}}{\Omega R} \frac{B_0}{B} \sin \theta - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{B r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}}{\Omega R} \frac{B_0}{B} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch, daß

$$v_{||} \tau_0 \cdot \nabla f = \frac{\theta v_{||}}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

so erhält man statt 1:1:

$$\begin{aligned}
 1:3 \quad &\left\{ \frac{\theta v_{||}}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}}{\Omega R} \frac{B_0}{B} \cos \theta + \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right\} \\
 &\cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left\{ \frac{v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}}{\Omega R} \frac{B_0}{B} \sin \theta - \frac{1}{B r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} \\
 &\cdot \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\delta f}{\delta t} \Big|_{\text{coll}}
 \end{aligned}$$

1:3 ist die Driftgleichung in den Variablen  $(r, \theta, v, \xi)$

Wir machen jetzt die Variablentransformation  $(r, \theta, v, \xi) \rightarrow$

$(r, \theta, v_R, v)$ .

Es ist:  $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\mu, \xi)$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} f(v_{II}, v) + \frac{\partial}{\partial v_{II}} f(v_{II}, v) \frac{\partial v_{II}(\mu, \xi)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial v} f(v_{II}, v) \cdot \frac{\partial v(\mu, \xi)}{\partial \theta}$$

(wir unterdrücken im folgenden die Ortsvariablen)

Mit

$$\frac{\partial v_{II}(\mu, \xi)}{\partial \theta} = -\frac{v_{II}^2 B_0 \varepsilon}{2 B v_{II}} \sin \theta - \frac{e}{m v_{II}} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi$$

und

$$\frac{\partial v(\mu, \xi)}{\partial \theta} = -\frac{e}{m v} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mu, \xi)}{\partial \theta} &= \frac{\partial f(v_{II}, v)}{\partial \theta} - \frac{\partial f(v_{II}, v)}{\partial v_{II}} \left\{ \frac{v_{II}^2 B_0 \varepsilon}{2 B v_{II}} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{m v_{II}} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} - \frac{\partial f(v_{II}, v)}{\partial v} \frac{e}{m v} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mu, \xi)}{\partial r} &= \frac{\partial f(v_{II}, v)}{\partial r} + \frac{\partial f(v_{II}, v)}{\partial v_{II}} \frac{\partial v_{II}(\mu, \xi)}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\partial f(v_{II}, v)}{\partial v} \frac{\partial v(\mu, \xi)}{\partial r} \end{aligned}$$

und mit

$$\frac{\partial V_{II}(\mu, \xi)}{\partial r} = \frac{V_1^2 B_0}{2 V_{II} B R} \cos \theta - \frac{e}{m V_{II}} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

und

$$\frac{\partial V(\mu, \xi)}{\partial r} = - \frac{e}{m v} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

folgt  $\frac{\partial f(\mu, \xi)}{\partial r}$

$$= \frac{\partial f(V_{II}, v)}{\partial r} + \frac{\partial f(V_{II}, v)}{\partial V_{II}} \left\{ \frac{V_1^2 B_0}{2 B V_{II} R} \cos \theta - \frac{e}{m V_{II}} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} \\ - \frac{\partial f(V_{II}, v)}{\partial v} \frac{e}{m v} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Damit erhalten wir aus 1:3

$$1:4 \left\{ \frac{V_{II} \theta}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{V_{II}^2 + \frac{V_1^2}{2}}{\Omega R} \frac{B_0}{B} \cos \theta + \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right\} \\ \left\{ \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial V_{II}} \left[ \frac{V_1^2 B_0 \xi}{2 B V_{II}} \sin \theta + \frac{e}{m V_{II}} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial f}{\partial v} \right. \\ \left. \frac{e}{m v} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} + \left\{ \frac{V_{II}^2 + V_{1/2}^2}{\Omega R} \frac{B_0}{B} \sin \theta - \frac{1}{B r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial r} \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial V_{II}} \left[ \frac{V_1^2 B_0}{2 B V_{II} R} \cos \theta - \frac{e}{m V_{II}} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{e}{m v} \right\}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = \left. \frac{\delta f}{\delta t} \right\}_{\text{coll}}$$

Die einzelnen Terme in 1:4 sind von verschiedener Ordnung in  $\frac{p}{r}$ , so daß wir nach  $p/r$  entwickeln können.  $f$  und  $\phi$  schreiben wir in dieser Entwicklung:

$$f = f_0 + f_1 + \dots \quad \phi = \phi_0 + \phi_1 + \dots$$

Wir machen für das selbstkonsistente elektrische Feld die übliche Annahme

$$1:5 \quad e \phi_0 = m v_t^2$$

und erhalten dann aus 1:4:

$$\begin{aligned} 1:6 \quad & \left\{ \frac{v_{||}^0 \theta}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{v_{||}^2 + v_{\perp}^2/2}{\Omega R} \frac{B_0}{B} \cos \theta + \frac{1}{B} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \frac{1}{B} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \dots \right) \right\} \\ & \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} - \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_{||}} + \frac{\partial f_1}{\partial v_{||}} + \dots \right) \left[ \frac{v_{\perp}^2 B_0 \epsilon}{2 B v_{||}} \sin \theta + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{e}{m v_{||}} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} + \frac{e}{m v_{||}} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \dots \right] - \left( \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial v} + \dots \right) \frac{e}{m v} \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \dots \right) \right\} + \left\{ \frac{v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}}{\Omega R} \frac{B_0}{B} \sin \theta - \frac{1}{B r} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{B r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \dots \right\} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\partial f_1}{\partial r} + \dots + \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_{||}} + \frac{\partial f_1}{\partial v_{||}} + \dots \right) \right. \\ & \left[ \frac{v_{\perp}^2 B_0}{2 B v_{||} R} \cos \theta - \frac{e}{m v_{||}} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \dots \right) \right] - \left( \frac{\partial f_0}{\partial v} \right. \\ & \left. + \frac{\partial f_1}{\partial v} + \dots \right) \frac{e}{m v} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \dots \right) \left\} = \left. \frac{\delta f_0}{\delta t} \right\}_{\text{coll}} + \left. \frac{\delta f_1}{\delta t} \right\}_{\text{coll}} \end{aligned}$$

Die Indizes über den einzelnen Termen in 1:6 sind so zu verstehen, daß bei der Ausmultiplikation der Klammern die Summe der jeweiligen Indizes die Ordnung des entstehenden Terms in  $\rho/r$  angibt.

Dem Term  $\frac{\theta v_{||}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f_0$  wurde als Referenzgröße willkürlich die Ordnung 0 zugeordnet. Außerdem haben wir noch  $\frac{\rho}{r} \ll \epsilon$  benutzt, so daß auch noch Terme  $\sim \frac{\rho}{r} \frac{1}{\epsilon}$  und  $\sim \frac{\rho}{r} \epsilon$  von der Ordnung  $\rho/r$  sind.

In 0-ter Ordnung finden wir:

$$1:7 \quad \frac{v_{||} \theta}{r} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial \theta} - \frac{\partial f_0}{\partial v_{||}} \left( \frac{v_{\perp}^2 B_0 \epsilon}{2 B v_{||}} \sin \theta + \frac{e}{m v_{||}} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{e}{m v} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \right] = \left. \frac{\delta f_0}{\delta t} \right|_{coll}$$

Wir nehmen an: <sup>†</sup>

$$f_0 = \frac{n_0(r, \theta)}{(2\pi v_t^2)^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{2 v_t^2}} \quad (f_0 \text{ eine lokale Maxwellverteilung})$$

Da wir nur die Diffusion betrachten wollen, beschränken wir uns auf den Fall konstanter Temperatur ( $v_t$  ortsunabhängig) und lassen damit Wärmeleitungsvorgänge unberücksichtigt.

Damit nimmt 1:7 die Form

$$1:8 \quad \frac{v_{||} \theta}{r} \left( \frac{\partial n_0}{\partial \theta} + \frac{n_0 e}{m v_t^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \text{an.}$$

---

<sup>†</sup> Bezüglich einer genaueren Behandlung der Gleichung für  $f_0$  siehe etwa [8]. Sie ergibt, daß dies auch die einzige Lösung ist.

Die bisherigen Überlegungen zur Herleitung der kinetischen Gleichung gelten für Ionen und Elektronen gleichermaßen. Mit  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_e = -\mathbf{e}_i$  und  $n_o^e = n_o^i$  folgt daher aus 1:8 unmittelbar:

$$1:9 \quad \frac{\partial n_o}{\partial \theta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi_o}{\partial \theta} = 0 \quad \text{bzw.} \quad n_o = n_o(r) \quad \text{und} \quad \phi_o = \phi(r)$$

Nunmehr verschwinden in 1:6 alle Terme der Form  $\frac{\partial f_o}{\partial v_{||}}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \theta} f_o$ ,

$\frac{\partial \phi_o}{\partial \theta}$  und wir erhalten in der Ordnung  $\rho/r$ :

$$1:10 \quad \frac{V_{||} \theta}{r} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{e f_o}{m V_t^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \frac{V_{\perp}^2 B_o \varepsilon}{2 B V_{||}} \sin \theta \right] \\ + \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2}{\Omega R} \frac{B_o}{B} \sin \theta \left[ \frac{\partial f_o}{\partial r} - \frac{\partial f_o}{\partial v} \frac{e}{m v} \frac{\partial \phi_o}{\partial r} \right] = \\ \frac{\delta f}{\delta t} \Big|_{\text{coll}}$$

Von jetzt an spezifizieren wir den Stoßterm durch das Lorentz-gasmodell: [9]

$$1:11 \quad \frac{\delta f_1}{\delta t} \Big|_{\text{coll}} = \tilde{\gamma} \frac{\partial}{\partial V_{||}} \left( \frac{V^2 - V_{||}^2}{2} \frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \right)$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma \left( \frac{V_t}{V} \right)^3; \quad \gamma = \frac{n_o}{V_t^3} \frac{4\pi e^4}{m^2} \ln \Lambda$$

und beschränken uns damit endgültig auf Elektronen.

1:10 gilt jedoch auch noch für Ionen. Nun bedeutet die Anwendung der Lorentzgasnäherung, daß wir uns im Ruhesystem der Ionen befinden. [9] D.h.:

$$1:12 \quad \int d^3v_{||} v_{||} f_1^i = 0$$

Daraus folgt, wenn man 1:10 für Ionen über  $d^3v$  integriert und berücksichtigt, daß

$$\int d^3v \left[ v_{||} \frac{\partial f_1^i}{\partial \theta} + \frac{e_i}{m_i V_t^{i2}} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} v_{||} f_0^i - \frac{B_0 \epsilon \sin \theta}{2 B} V_1^2 \frac{\partial f_1^i}{\partial v_{||}} \right]$$

= 0 (nach partieller Integration des letzten Terms, mit 1:12  
und weil  $f_0$  symmetrisch in  $v_{||}$  )

und

$$\int d^3v \left( \frac{\delta f_1^i}{\delta t} \right)_{\text{coll}} = 0 \quad (\text{Teilchenzahlerhaltung bei Stößen})$$

für den verbleibenden Term in 1:10

$$\frac{B_0 \sin \theta}{2 \Omega^i R B} \left[ \frac{1}{n_0^i} \frac{\partial n_0^i}{\partial r} + \frac{e_i}{m_i V_t^{i2}} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right] \int d^3v f_0^i (V_1^2 v_{||}^2)$$

= 0

Also

$$\frac{1}{n_0^i} \frac{\partial n_0^i}{\partial r} + \frac{e_i}{m_i V_t^{i2}} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = 0$$

und mit  $n_o^i = n_o^e$  (Quasineutralität in 0-ter Ordnung) und  $e^i = -e$

$$\frac{\partial \phi_o}{\partial r} = \frac{1}{en_o} \frac{\partial n_o}{\partial r} T_i$$

Wir setzen dies in die zweite eckige Klammer in 1:10 ein und bekommen:

$$1:13 \quad \frac{\partial f_o}{\partial r} + \frac{e f_o}{m v_e^2} \frac{\partial \phi_o}{\partial r} = \frac{\partial f_o}{\partial r} + f_o \frac{T_i}{n_o T_e} \frac{\partial n_o}{\partial r} = \frac{\partial f_o}{\partial r} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)$$

1:13 und 1:11 in 1:10 ergeben:

$$1:15 \quad \frac{v_{ii} \theta}{r} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{e f_o}{m v_e^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial f_1}{\partial v_{ii}} \frac{(v^2 - v_{ii}^2) B_o \epsilon}{2 B v_{ii}} \sin \theta \right] + \frac{(v_{ii}^2 + v^2) B_o}{2 \Omega R B} \sin \theta \left[ 1 + \frac{T_i}{T_e} \right] \frac{\partial f_o}{\partial r} = \tilde{\gamma} \frac{\partial}{\partial v_{ii}} \left( \frac{v^2 - v_{ii}^2}{2} \frac{\partial f_1}{\partial v_{ii}} \right)$$

In 1:15 kommt das radiale elektrische Feld nicht mehr vor. Da es auch die radiale Driftgeschwindigkeit nicht beeinflusst, sind radiale elektrische Felder in dem Faktor  $(1 + T_i/T_e)$  in 1:15 voll berücksichtigt.

Wie in der Einleitung erwähnt, werden wir uns auf den Bereich beschränken, in dem gefangene Teilchen vernachlässigt werden können.

Für Gleichung 1:15 bedeutet dies, den Term

$$\frac{v_{ii} \theta}{r} \frac{\partial f_1}{\partial v_{ii}} \frac{\partial v_{ii}}{\partial \theta} = - \frac{v_{ii} \theta}{r} \frac{\partial f_1}{\partial v_{ii}} \frac{v^2 - v_{ii}^2}{2 B v_{ii}} B_o \epsilon \sin \theta$$

der von der  $\theta$ -Abhängigkeit von  $v_{ii}$  herrührt, wegzulassen.

Für umlaufende Teilchen ist  $\frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \frac{\partial V_{||}}{\partial \theta} / \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \sim \epsilon$

$$(V_{||} \sim V_{\perp} \sim V_t)$$

Für gefangene Teilchen ist zwar  $\frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \frac{\partial V_{||}}{\partial \theta} / \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \sim 1$

$$(V_{||} \sim \sqrt{\epsilon} V_{\perp}; V_{\perp} \sim V_t)$$

jedoch ist in diesem Fall die rechte Seite von 1:15 der dominierende Term, sofern  $\gamma_{\perp} \gg 1$ , sofern also die effektive Stoßfrequenz für gefangene Teilchen groß ist gegenüber der Umlauffrequenz gefangener Teilchen.

Nunmehr haben wir folgende endgültige Form für die kinetische Gleichung:

$$1:16 \quad \frac{V_{||} \theta}{r} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{e f_0}{m V_t^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right] + \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2}{2 \Omega_0 R} \sin \theta$$

$$\cdot \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\partial f_0}{\partial r} = \tilde{\gamma} \frac{\partial}{\partial V_{||}} \left( \frac{V_{\perp}^2 - V_{||}^2}{2} \frac{\partial f_1}{\partial V_{||}} \right)$$

Dabei haben wir noch konsequenterweise Terme der Ordnung  $\epsilon$  weggelassen, indem wir  $B \cong B_0$  und  $\Omega \cong \Omega_0 = \frac{|e| B_0}{c m}$  gesetzt haben.

Gleichung 1:16 gilt für alle  $\gamma \gg 1$ , das heißt, sie umfasst die rechte Seite des Plateaubereichs und den Pfirsch - Schlüter - Bereich.

## 2: Die Lösung der kinetischen Gleichung

### 2:1: Elimination des azimutalen E-Feldes und Separation der Winkelabhängigkeit

Wir definieren die neue Funktion  $\tilde{f}_1$ :

$$2:1 \quad \tilde{f}_1 = f_1 + \frac{e}{mVt^2} f_0 \phi_1$$

Mit 1:16 erhalten wir für  $\tilde{f}_1$  die Gleichung

$$2:2 \quad \frac{\theta V_{||}}{r} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \theta} + \frac{V^2 + V_{||}^2}{2 \Omega_0 R} \sin \theta \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{f_0}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial r} \\ = \tilde{r} \frac{\partial}{\partial V_{||}} \left( \frac{V^2 - V_{||}^2}{2} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial V_{||}} \right)$$

in der das azimutale elektrische Feld nicht mehr vorkommt. Nun denken wir uns  $\tilde{f}_1$  als Fourierreihe nach  $\theta$  entwickelt:

$$2:3 \quad \tilde{f}_1 = \text{Re} \left\{ \sum_0^{\infty} \tilde{g}_r e^{i r \theta} \right\}$$

Man sieht unmittelbar, daß 2:2 die Fourierkomponenten nicht verkoppelt. Da ferner nur  $\tilde{g}^1$  die Winkelmittelung überlebt, die wir bei der Berechnung des radialen Teilchenflusses ausführen werden, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit

2:4  $f_1 = \text{Re} \{ e^{i\theta} \tilde{g}^1(V_{||}) \}$  ansetzen. 2:4 in 2:2 ergibt mit

$$\sin \theta = \text{Re} \{ -i e^{i\theta} \}$$

$$2:5 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ i \frac{\Theta V_{II}}{r} \tilde{g} - i \frac{V^2 + V_{II}^2}{2 \Omega_o R} \frac{f_o}{n_o} \frac{\partial n_o}{\partial r} \right. \right.$$

$$\left. \cdot \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) - \tilde{\gamma} \frac{\partial}{\partial V_{II}} \left( \frac{V^2 - V_{II}^2}{2} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial V_{II}} \right) \right] \Big\} = 0 \text{ für alle } \theta$$

Also:

$$2:6 i \frac{\Theta V_{II}}{r} \tilde{g} - i \frac{V^2 + V_{II}^2}{2 \Omega_o R} \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{f_o}{n_o} \frac{\partial n_o}{\partial r} = \tilde{\gamma} \frac{\partial}{\partial V_{II}} \left( \frac{V^2 - V_{II}^2}{2} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial V_{II}} \right)$$

Im folgenden ist es zweckmäßig die Variable  $v_{II}/v = z$  und die Abkürzungen

$$2:7 \frac{\tilde{\gamma} r}{\Theta V} = \frac{1}{\alpha} ; \frac{r V}{2 \Theta R \Omega_o n_o} \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\partial n_o}{\partial r} = A \text{ einzuführen.}$$

$g(z) = \tilde{g}(v_{II})$  genügt dann der Gleichung

$$2:8 i z g - i A (1 + z^2) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1 - z^2}{2} \frac{\partial g}{\partial z} \right) \text{ die im Intervall}$$

$[-1, 1]$  zu lösen ist.

## 2:2 Die Randbedingungen in $v_{II}$

Der homogene Teil von 2:8 hat die (Normal)form:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \frac{2z}{1-z^2} \frac{\partial g}{\partial z} - \alpha \frac{2z}{1-z^2} g = 0$$

$z=1$  und  $z=-1$  sind also außerwesentliche singuläre Stellen. Die charakteristische Gleichung lautet in beiden Fällen: [12]

$$\xi(\xi-1) + \xi = \xi^2 = 0 \quad \text{mit den Lösungen} \quad \xi_1 = \xi_2 = 0$$

$\xi_1 - \xi_2$  ist also jeweils eine ganze Zahl. Aufgrund der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen mit außerwesentlichen Singularitäten gibt es freie Lösungen und damit auch Lösungen von 2:8, die sich an den Rändern des Intervalls  $(-1,1)$  wie  $\ln(1+z)$  bzw.  $\ln(1-z)$  verhalten. (Das muß nicht notwendig für alle freien Lösungen gelten.) Solche Lösungen sind unphysikalisch. Wir schließen sie aus, indem wir als Randbedingung für  $g$  fordern:

2:9  $g(z)$  ist von beschränkter Schwankung im Intervall  $(-1,1)$

Das schließt insbesondere ein, daß  $\lim_{z \rightarrow \pm 1} g(z)$  existiert.

Aus physikalischen Gründen können wir annehmen, daß es mindestens eine Lösung von 2:8 gibt, die die Randbedingung 2:9 erfüllt.<sup>†</sup> Das folgende Lösungsverfahren ergibt dann, daß sie eindeutig ist. Es

-----  
<sup>†</sup> Wir beweisen hier nicht, daß es überhaupt eine Lösung gibt, die die Randbedingung erfüllt.

Eine Möglichkeit dies zu tun besteht darin, Lösungen als Potenzreihen in  $\alpha$  zu suchen. Man findet dann, daß es genau eine Lösung von 2:8 mit der Eigenschaft 2:9 gibt, in Übereinstimmung mit dem oben gesagten. Das Verfahren ist relativ aufwendig und zur expliziten Berechnung der Lösung nicht gut geeignet, so daß wir den Punkt hier nicht weiter verfolgen.

gibt also keine Lösung der homogenen Gleichung, die die Randbedingung erfüllt.

Eine Lösung mit der Eigenschaft 2:9 kann nach Legendreschen Polynomen entwickelt werden. [ 13 ]

$$2:10 \quad g = \sum_0^{\infty} a_n P_n(z)$$

Eine Lösung der Form 2:10 hat den Vorteil, daß wir gegen der Orthogonalität der  $P_n$  die  $v_{II}$  - Integration bei der Berechnung des Diffusionsstroms ausführen können.

Außerdem vereinfacht sich das Gleichungssystem für die  $a_n$  dadurch, daß die  $P_n$  Eigenfunktionen des Stoßoperators sind.

Wenn wir 2:10 in 2:8 einsetzen und benutzen, daß

$$2:11 \quad 1 + z^2 = \frac{4}{3} P_0 + \frac{2}{3} P_2$$

und

$$2:12 \quad (1 - z^2) \frac{\partial}{\partial z^2} P_n - 2z \frac{\partial}{\partial z} P_n = -n(n+1) P_n$$

sowie

$$2:13 \quad z P_n = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}$$

erhalten wir:

$$2:14 \quad i \sum_0^{\infty} a_n \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + i \sum_0^{\infty} a_n \frac{n}{2n+1} P_{n-1} - i A.$$

$$\left(\frac{4}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_2\right) = -\frac{1}{2\alpha} \sum_0^{\infty} \alpha_n n(n+1)P_n$$

und daraus durch Umindizierung der beiden ersten Summen:

$$\begin{aligned} 2:15 \quad & i \int_1^{\infty} \alpha_{m-1} \frac{m}{2m-1} P_m + i \int_0^{\infty} \alpha_{m+1} \frac{m+1}{2m+3} P_m \\ & - i A \left(\frac{4}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_2\right) = -\frac{1}{2\alpha} \sum_0^{\infty} \alpha_m m(m+1)P_m \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt das folgende Gleichungssystem für die  $a_n$ :

$$2:16:0 \quad i \frac{1}{3} \alpha_1 - i A \frac{4}{3} = 0$$

$$:1 \quad i \alpha_0 + i \frac{2}{5} \alpha_2 = -\frac{1}{2\alpha} 2 \alpha_1$$

$$:2 \quad i \frac{2}{3} \alpha_1 + i \frac{3}{7} \alpha_3 - i \frac{2}{3} A = -\frac{3}{\alpha} \alpha_2$$

$$:3 \quad i \frac{n}{2n-1} \alpha_{n-1} + i \frac{n+1}{2n+3} \alpha_{n+1} = -\frac{n(n+1)}{2\alpha} \alpha_n$$

$$\text{bzw. } \alpha_{n+1} = \frac{i}{2\alpha} n(2n+3) \alpha_n - \frac{n(2n+3)}{(n+1)(2n-1)} \alpha_{n-1} \quad \begin{matrix} n \geq 3 \\ n \geq 3 \end{matrix}$$

Im folgenden erweisen sich die Abkürzungen

$$2:17 \quad J_n = \frac{i}{2\alpha} n(2n+3) \quad \text{und} \quad G_n = \frac{-n(2n+3)}{(n+1)(2n-1)} \quad \text{als}$$

zweckmäßig. Mit ihnen lautet 2:16:3

$$2:18 \quad \alpha_{n+1} = J_n \alpha_n + G_n \alpha_{n-1}$$

## 2:4 Lösung des Gleichungssystems der Koeffizienten. Kettenbruch- darstellung für $a_0$ .

### 2:4:1 Die Funktion $H_{n,m}$ und ihre Eigenschaften.

Wir bemerken zunächst: Durch endlichfache Iteration von 2:16:3 können wir  $a_{n+1}$  durch  $a_3$  und  $a_2$  ausdrücken.  $a_3$  und  $a_2$  lassen sich mittels 2:16:0-2:16:2 durch  $a_0$  darstellen. Alle  $a_n$  lassen sich also durch endlichfache Anwendung der Rekursionsformeln durch  $a_0$  ausdrücken.  $a_0$  ist durch das Gleichungssystem selbst noch nicht bestimmt. Zu jedem  $a_0$  können wir nämlich iterativ eine Folge  $a_v$  konstruieren, die das Gleichungssystem erfüllt. Um ein eindeutige Lösung zu erhalten, werden wir gewisse Informationen über das asymptotische Verhalten der  $a_v$  verwenden, die eine Folge der Randbedingung 2:9 sind.

Wir gehen folgendermaßen vor:

Die allgemeinste Relation, die wir durch endlichfache Iteration der Rekursionsformeln gewinnen können, verknüpft zwei beliebige  $a_v$  z.B.  $a_0$  und  $a_n$ . Die einzige Möglichkeit daraus eine Relation für  $a_0$  alleine zu bekommen, besteht in der Elimination von  $a_n$  durch einen Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ .

Dazu führen wir eine Funktion  $H_{m,n}$  ein, die die endlichfache Iteration der Rekursionsformeln beschreibt. Mit ihr läßt sich  $a_0$  durch  $H_{m,n}$  und  $a_n$  darstellen. Diese Darstellung zerfällt additiv in zwei Teile.

Der eine, der  $a_n$  enthält, verschwindet im Limes  $n \rightarrow \infty$  auf Grund seiner Form und des asymptotischen Verhaltens der  $a_n$ , das wiederum eine Folge der Randbedingung ist.

Der zweite Teil ist unabhängig von  $a_n$  und konvergiert für  $n \rightarrow \infty$ . Um das zu zeigen, ziehen wir aus der Funktion  $H_{m,n}$  einen "großen Faktor" (in  $n$ ), der sich wegekürzt, heraus und beweisen, daß die neue Funktion  $F_{m,n}$  in  $n$  konvergiert.

Wir definieren zunächst für  $n \geq m \geq 3$  Hilfsfunktionen  $H_{n,m}$  und  $G_{n,m}$  durch:

$$2:19 \quad a_{n+1} = H_{n,m} a_m + G_{n,m} a_{m-1}$$

$H_{n,m}$  und  $G_{n,m}$  sind eindeutig definiert, wenn man noch fordert, daß die Darstellung 2:19 von  $a_{n+1}$  durch  $a_m$  und  $a_{m-1}$  durch  $n-m$ -fache Anwendung von 2:18 erzeugt sein soll.

Mit 2:19 und 2:18 ergeben sich einige Beziehungen für die Funktionen  $H_{n,m}$  und  $G_{n,m}$ , die wir jetzt herleiten.

Es ist nach Definition 2:19

$$a_{n+1} = H_{n,m} a_m + G_{n,m} a_{m-1}$$

und mit 2:18

$$\begin{aligned} &= H_{n,m} \{ J_{m-1} a_{m-1} + G_{m-1} a_{m-2} \} + G_{n,m} a_{m-1} \\ &= \{ H_{n,m} J_{m-1} + G_{n,m} \} a_{m-1} + \\ &\quad H_{n,m} G_{m-1} a_{m-2} \end{aligned}$$

Andererseits mit 2:19

$$= H_{n,m-1} a_{m-1} + G_{n,m-1} a_{m-2}$$

Daraus folgt:

$$2:20 \quad G_{n,m-1} = H_{n,m} G_{m-1}$$

und

$$\begin{aligned} 2:21 \quad H_{n,m-1} &= H_{n,m} J_{m-1} + G_{n,m} \\ &= H_{n,m} J_{m-1} + H_{n,m+1} G_m \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2:22 \quad H_{n,m} &= H_{n,m+1} J_m + H_{n,m+2} \\ &\quad \cdot G_{m+1} \end{aligned}$$

Wir benötigen noch eine entsprechende Formel, die  $H_{n,m}$  für festes  $m$  und verschiedene Werte von  $n$  verknüpft.

Es ist wegen 2:19 und 2:20

$$a_{n+2} = H_{n+1,m} a_m + H_{n+1,m+1} G_m a_{m-1}$$

und wegen 2:18

$$= J_{n+1} a_{n+1} + G_{n+1} a_n$$

sowie wegen 2:19 und 2:20

$$= J_{n+1} \{ H_{n,m} a_m + H_{n,m+1} G_m a_{m-1} \}$$

$$\begin{aligned}
& + G_{n+1} \{ H_{n-1,m} a_m + H_{n-1,m+1} G_m a_{m-1} \} \\
& = \{ J_{n+1} H_{n,m} + G_{n+1} H_{n-1,m} \} a_m \\
& + \{ J_{n+1} H_{n,m+1} G_m + G_{n+1} H_{n-1,m+1} G_m \} a_{m-1}
\end{aligned}$$

Der Vergleich der letzten und ersten Zeile ergibt:

$$2:23 \quad H_{n+1,m} = J_{n+1} H_{n,m} + G_{n+1} H_{n-1,m}$$

2:4:2 Die Funktion  $F_{n,m}$  und ihre Eigenschaften.

Wir führen jetzt die neue Funktion  $F_{n,m}$  ein durch:

$$2:24 \quad H_{n,m} = \left( \prod_{\lambda=m}^n J_{\lambda} \right) F_{n,m}$$

Damit erhalten wir aus 2:21

$$\begin{aligned}
2:25 \quad F_{n,m} \left( \prod_{\lambda=m}^n J_{\lambda} \right) &= J_m \left( \prod_{m+1=\lambda}^n J_{\lambda} \right) F_{n,m+1} \\
&+ \frac{G_{m+1}}{J_m J_{m+1}} F_{n,m+2} \left( \prod_{\lambda=m+2}^n J_{\lambda} \right) J_m J_{m+1}
\end{aligned}$$

bzw.

$$2:26 \quad F_{n,m} = F_{n,m+1} + \frac{G_{m+1}}{J_m J_{m+1}} F_{n,m+2}$$

Entsprechend erhält man aus 2:23

$$2:27 \left( \prod_m^{n+1} J_\lambda \right) F_{n+1,m} = J_{n+1} \left( \prod_m^n J_\lambda \right) F_{n,m}$$

$$+ \frac{G_{n+1}}{J_n J_{n+1}} F_{n-1,m} \left( \prod_m^{n-1} J_\lambda \right) J_n J_{n+1}$$

bzw.

$$2:28 F_{n+1,m} = F_{n,m} + \frac{G_{n+1}}{J_n J_{n+1}} F_{n-1,m}$$

Wir bemerken, daß stets

$$2:29 \frac{G_n}{J_n J_{n-1}} = \frac{4\alpha^2}{(n+1)(n-1)(2n+1)(2n-1)} > 0$$

Wir beweisen jetzt, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,m}$  existiert. Aus den Definitionen ergibt sich zunächst unmittelbar:

$$F_{m,m} = 1$$

$$F_{m+1,m} = 1 + \frac{G_{m+1}}{J_m J_{m+1}}$$

Also gilt für  $n=m=0,1$  (wegen 2:29)

$$2:30:1 \quad F_{n,m} \text{ reell}$$

$$:2 \quad F_{n,m} \geq 1$$

$$:3 \quad F_{n+1,m} > F_{n,m}$$

Eine triviale Induktion unter Benutzung von 2:28 und 2:29 zeigt,  
daß 2:30:3-2:30:1 für alle  $n \geq m \geq 3$  gelten.

Nun betrachten wir 2:28 für festes  $m$ :

$$2:31 \quad F_{n+1,m} = F_{n,m} + \frac{(2\alpha)^2}{n(2n+1)(2n+3)(n+2)} \\ \cdot F_{n-1,m}$$

$$< F_{n,m} \left( 1 + \frac{4\alpha^2}{n(2n+1)(2n+3)(n+2)} \right)$$

wegen  $F_{n-1,m} < F_{n,m}$

$$< F_{n,m} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^4} \right)$$

Daraus folgt:

$$2:32 \quad F_{n+1,m} < \gamma_m \left[ \prod_{r=1}^n \left( 1 + \frac{\alpha^2}{r^4} \right) \right]$$

wobei  $\gamma_m$  eine Konstante  
ist, die nur von  $m$  abhängt.

Nun gilt der Satz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \prod_1^n \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^4} \right) \right] \text{ existiert} \iff \sum_1^\infty \frac{\alpha^2}{n^4} \text{ existiert}$$

Die Reihe  $\sum_1^\infty \frac{\alpha^2}{n^4}$  konvergiert aber bekanntlich und es ist

$$\sum_1^\infty \frac{\alpha^2}{n^4} = \alpha^2 \frac{2^3 \pi^4}{4! \cdot 30}$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned} F_{n+1,m} &< \gamma_m \left[ \prod_1^n \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^4} \right) \right] \\ &< \gamma_m \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \prod_1^n \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^4} \right) \right] \end{aligned}$$

Dies, zusammen mit der Eigenschaft 2:30:3, impliziert:

$$2:33 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,m} = F_m \text{ existiert.}$$

Außerdem folgt noch unmittelbar  $F_m$  reell und  $F_m > 1$ .

2:4:3 Darstellung von  $a_0$  durch  $F_3/F_4$  mittels der Randbedingung

aus 2:19 und 2:20 folgt

$$\begin{aligned} 2:34 \quad a_{n+1} &= H_{n,3} a_3 + H_{n,4} G_3 a_2 \\ &= \left( \prod_3^n J_\lambda \right) \left\{ F_{n,3} a_3 + F_{n,4} \frac{G_3}{J_3} a_2 \right\} \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten der Legendreschen Reihe einer Funktion mit der Eigenschaft 2:9 muß gelten:†

$$O_n = O(1/\sqrt{n})$$

Mit dieser Zusatzbedingung an die  $a_n$ , die eine Folge der Randbedingung ist, können wir im folgenden einen eindeutigen Ausdruck für  $a_0$  gewinnen. Sie macht das Gleichungssystem also eindeutig.

Da  $\prod_3^n J_\lambda = \prod_3^n \left( \frac{i}{2\alpha} \lambda(2\lambda+3) \right)$  ergibt sich

$${}^{2:35} F_3 a_3 + F_4 \frac{G_3}{J_3} a_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ F_{n,3} a_3 \right.$$

$$\left. + F_{n,4} \frac{G_3}{J_3} a_2 \right\} \quad \text{wegen 2:33}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_{n+1}}{\left( \prod_3^n J_\lambda \right)} \right\} = 0$$

† Siehe etwa [ 13 ] Seite 340

Also

$$2:36 \quad \frac{a_2}{a_3} = - \frac{J_3}{G_3} \frac{F_3}{F_4} \quad (F_4 \neq 0 \text{ stets!})$$

Mittels 2:16:0-2:16:2 können wir  $a_2$  und  $a_3$  durch  $a_0$  ausdrücken:

$$2:37 \quad a_2 = \frac{i}{\alpha} 10 A - \frac{5}{2} a_0$$

$$2:38 \quad a_3 = - \left( \frac{14}{3} + \frac{70}{\alpha^2} \right) A - i \frac{35}{2\alpha} a_0$$

Daraus folgt:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\frac{i}{\alpha} 10 A - \frac{5}{2} a_0}{- \left( \frac{14}{3} + \frac{70}{\alpha^2} \right) A - i \frac{35}{2\alpha} a_0}$$

Und wenn wir nach  $a_0$  auflösen:

$$2:39 \quad a_0 = \frac{\frac{i}{\alpha} 10 A + A \left( \frac{14}{3} + \frac{70}{\alpha^2} \right) \frac{a_2}{a_3}}{\frac{5}{2} - i \frac{35}{2\alpha} \frac{a_2}{a_3}}$$

$$\text{Mit 2:36 und } - \frac{J_3}{G_3} = \frac{i 10}{\alpha} \quad \text{erhalten wir weiter:}$$

$$2:40 \quad a_0 = \frac{4iA}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{15 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{70 F_3/F_4} \right)} \right)$$

Damit haben wir  $a_0$  durch die eine Funktion  $F_3/F_4$  ausgedrückt.  
 Im Prinzip wäre es jetzt möglich,  $F_3$  und  $F_4$  durch die  $F_{n,3}$  und  $F_{n,4}$  darzustellen, denn 2:28 gestattet es  $F_{n,3}$  bzw.  $F_{n,4}$  für beliebiges  $n$  rekursiv zu berechnen. Auf diese Weise erhält man eine Reihendarstellung für  $F_3$  und  $F_4$ . Man kann jedoch auch die Funktion  $F_3/F_4$  direkt als Kettenbruch darstellen. Diese Darstellung ist wesentlich einfacher und sehr leicht numerisch auszuwerten.

#### 2:4:4 Kettenbruchdarstellung für $F_3/F_4$

Wenden wir 2:33 auf 2:26 an, so folgt:

$$2:41 \quad F_m = F_{m+1} + \frac{4a^2}{m(m+2)(2m+1)(2m+3)} F_{m+2} \quad m \geq 3$$

Auf das unendliche Gleichungssystem 2:41 ist der folgende Satz aus der Theorie der Kettenbrüche anwendbar:<sup>†</sup>

In dem unendlichen Gleichungssystem  $X_v = b_v X_{v+1} + a_{v+1} X_{v+2}$   
 $v=3,4,\dots$  seien alle  $a_v$  und wenigstens ein  $X_v$  von Null verschieden

$$\text{Dann gilt} \quad \frac{X_3}{X_4} = b_3 + \frac{a_4}{b_4} + \frac{a_5}{b_5} + \dots$$

falls die Bedingungen

$$a) \quad a_v, b_v, X_v \quad \text{sind positiv und} \quad X_4 \neq 0$$

---

<sup>†</sup> Siehe [14] Band 2 Seite 46 f

b) Der Kettenbruch konvergiert  
erfüllt sind.

2:41 zeigt, daß stets  $a_r, b_r > 0$ . Ferner ist für alle  $X_r, X_r > 0$   
wegen 2:33

Damit ist Teila) der Bedingungen erfüllt.

Der Kettenbruch hat lauter positive Elemente. Dann ist hinreichend  
für seine Konvergenz, daß  $\sum \sqrt{b_r b_{r+1} / a_{r+1}}$  divergiert. In unserem  
Fall heißt das, wegen  $b_r = 1$  und  $a_{r+1} = 4\alpha^2 / r(r+2)(2r+1)(2r+3)$ ,  
daß  $\sum \sqrt{r(r+2)(2r+1)(2r+3) / 4\alpha^2}$  divergiert. Das ist offensicht-  
lich der Fall.

Damit ist Teil b) der Bedingungen erfüllt.

Insgesamt haben wir also, wenn wir noch die Abkürzung

$$2:42 \quad \frac{F_n}{F_{n+1}} = S_n \quad \text{benutzen}$$

$$2:43 \quad \frac{F_3}{F_4} = S_3 = 1 + \frac{4\alpha^2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \left( 1 + \frac{4\alpha^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \left( 1 + \frac{4\alpha^2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \left( 1 + \dots \right)} \right)} \right)}$$

Der Kettenbruch 2:43 wird durch die Rekursionsformel

$$2:44 \quad S_m = 1 + \frac{4\alpha^2}{m(m+2)(2m+1)(2m+3)} \frac{1}{S_{m+1}}$$

erzeugt. Wenn wir 2:44 für  $m=2$  mit dem Ausdruck 2:40 für  $a_0$  vergleichen, finden wir zusätzlich:

$$2:45 \quad a_0 = \frac{4iA}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{15 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{70 S_3} \right)} \right) = \frac{4iA}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{15 S_2} \right)$$

wobei  $S_2$  jetzt durch 2:44 definiert sein soll.

3: Berechnung des Diffusionskoeffizienten

3:1: Darstellung von D durch die Funktion  $S_2$

Der radiale Fluß von Elektronen (-guiding-centern) durch die Einheit der magnetischen Oberfläche  $r=\text{const.}$  ist durch:

$$3:1 \quad \Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (1 + \varepsilon \cos \theta) \int d^3x V_D r f$$

gegeben.

$$\text{Mit } V_{Dr} = \frac{B_0}{B} \frac{V_{||}^2 + V_{\perp}^2/2}{\Omega R} \sin \theta - \frac{1}{rB} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$= -\frac{mc}{e B^2} (V_{||}^2 + \frac{V_{\perp}^2}{2}) \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} - \frac{1}{rB} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

aus Kapitel 1: erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} 3:2 \quad \Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{B_0}{B} \int d^3\mathcal{W} \left\{ -\frac{mc}{e r} \left( V_{||}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{V_{\perp}^2}{2} \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial \theta} - \frac{1}{rB} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \right\} \left\{ f_0 + f_1 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Und daraus mit  $\frac{1}{B^3} \frac{\partial B}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{B^2} \right)$  in niedrigster Ordnung in  $\delta/r$ :

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} B_0 \int d^3\mathcal{W} \left\{ \frac{mc}{2r e} \left( V_{||}^2 + \frac{V_{\perp}^2}{2} \right) f_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{B^2} \right) \right\} \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{n_0}{r B_0} (1 + \epsilon \cos \theta)^2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Partielle Integration bezüglich  $\theta$  im ersten Integral ergibt unter Berücksichtigung der Periodizität von  $f_1$  in  $\theta$  :

$$\begin{aligned}
 3:3 \quad \Gamma &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} B_0 \int d^3x \frac{mc (v_{||}^2 + v_{\perp}^2/2)}{2e\tau B_0^2} (-1) \\
 &\quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\tau B_0} n_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \\
 &= - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 \left\{ \frac{n_0}{\tau B_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{c}{2e\tau B_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. \int d^3x m (v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}) f_1 \right\} \\
 &= - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\tau e B_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ n_0 e \phi_1 + \frac{c}{2} (p_{||} + p_{\perp}) \right\}
 \end{aligned}$$

Mit (2:1)  $f_1 = \tilde{f}_1 - \frac{e f_0 \phi_1}{m v_t^2}$  erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned}
 3:4 \quad p_{||} + p_{\perp} &= \int d^3x m (v_{||}^2 + v_{\perp}^2/2) m \\
 &\quad \cdot \left( \tilde{f}_1 - \frac{e}{m v_t^2} f_0 \phi_1 \right) \\
 &= \int d^3x m (v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}) \tilde{f}_1 - 2e n_0 \phi_1
 \end{aligned}$$

3:4 in 3:3 liefert für  $\Gamma$  den Ausdruck:

$$3:5 \quad \Gamma = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\hbar B_0 e} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ n_0 e \phi_1 + \frac{c}{2} \right.$$

$$\left. \int d^3 w (v_{||}^2 + v_{\perp}^2/2) m \tilde{f}_1 - e n_0 \phi_1 \right\}$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\hbar B_0 e} m c \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \int d^3 w \frac{v_{||}^2 + v_{\perp}^2}{2} \tilde{f}_1 \right.$$

Darin kommt  $\phi_1$  nicht mehr vor. Das gleiche gilt für die Gleichung 2:2, die  $\tilde{f}_1$  bestimmt. Außerdem ist die Randbedingung 2:9 invariant beim Übergang  $f_1 \rightarrow \tilde{f}_1$  und bezieht sich nicht auf  $\phi_1$ . Damit ist  $\phi_1$  völlig eliminiert.

Auf diese Weise ist es möglich, elektrische Felder 1-ter Ordnung exakt zu berücksichtigen, ohne sie bestimmen zu müssen.

Wir bemerken noch, daß man von vorneherein  $\phi_1 \equiv 0$  setzen könnte. Man bekäme dann direkt den Ausdruck 3:5 für  $\Gamma$  und 2:2 als kinetische Gleichung.

Aus 3:3 entnehmen wir, daß die Diffusion teils durch das elektrische Feld, teils durch den Druckgradienten getrieben wird. Was wir gerade gefunden haben, ist, daß die gesamte treibende Kraft durch die kinetische Gleichung und die Randbedingungen für die Verteilungsfunktion bereits bestimmt ist. Daher ist für die Berücksichtigung des azimuthalen Feldes nicht dessen explizite Mitnahme, sondern die sorgfältige Auswertung der Randbedingungen wesentlich.

Wir betrachten nun:

$$\int d^3w \frac{V_{11}^2 + V^2}{2} \tilde{f}_1$$

$$= \pi \int_0^\infty dv \int_0^\pi d\psi \sin \psi v^4 (1 + \cos^2 \psi) \tilde{f}_1$$

Wir führen die neue Integrationsvariable  $z = \cos \psi = v_{11}/v$  ein und setzen (2:4)  $\tilde{f}_1 = \operatorname{Re} \{ e^{i\theta} g(z) \}$  ein:

$$= \pi \int_0^\infty dv \int_{-1}^1 dz v^4 (1+z^2) \operatorname{Re} \{ e^{i\theta} g(z) \}$$

Nun war (2:10)  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$  und (2:11)  $1+z^2$

$$= \frac{4}{3} P_0 + \frac{2}{3} P_2$$

Dies ergibt weiter, wenn wir noch die Orthogonalitätsrelation für die  $P_n$  anwenden:

$$3:6 \quad \int dV^3 \omega \frac{V_{11}^2 + V^2}{2} \tilde{f}_1$$

$$= \pi \int_0^\infty dV V^4 \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{8}{3} \alpha_0 + \frac{4}{15} \alpha_2 \right] e^{i\theta} \right\}$$

und mit (2:37)  $\alpha_2 = \frac{iA}{\alpha} 10 - \frac{5}{2} \alpha_0$

$$= \pi \int_0^\infty dV V^4 \operatorname{Re} \left\{ \left[ 2\alpha_0 + \frac{8}{3} \frac{iA}{\alpha} \right] e^{i\theta} \right\}$$

Für  $\alpha_0$  haben wir die Darstellung 2:45

$$= \pi \int_0^\infty dV V^4 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ \frac{8}{3} \frac{iA}{\alpha} + \frac{8iA}{\alpha} \cdot \left( 1 + \frac{\alpha^2}{15 S_2} \right) \right] \right\}$$

Wir setzen diesen Ausdruck in 3:5 ein und erhalten für  $\Gamma$  :

$$3:7 \quad \Gamma = \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{(1+\varepsilon \cos\theta)^2}{r B_0 e} m c \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\int_0^{\infty} dv v^4 \sin\theta \frac{A}{\alpha} \frac{32}{3} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{20 S_2} \right\}$$

Und mit dem ursprünglichen Ausdruck für A (2:7)

$$= \frac{\pi}{2} \frac{32}{3} \frac{m c}{2 e B_0 R \Omega_0 \Theta (2\pi v_t^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos\theta (1+\varepsilon \cos\theta)^2 \int_0^{\infty} dv v^5 e^{-v^2/2v_t^2} \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{20 S_2} \right)$$

Im zweiten Integral führen wir  $\alpha$  als neue Integrationsvariable ein. Mit

$$\alpha = \frac{\theta v}{r \tilde{r}} = \frac{\theta v_t}{r r} \frac{v^4}{v_t^4} \quad \text{folgt} \quad d\alpha = 4\alpha \frac{dv}{v}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dv v^5 e^{-v^2/2v_t^2} \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{20 S_2(\alpha^2)} \right) &= \frac{v_t^6}{4} \left( \frac{r}{r_2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{r_2}} \alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{20 S_2(\alpha^2)} \right) &= \frac{v_t^6}{2} \left( \frac{r}{r_2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \int_0^{\infty} d\beta e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{r_2}} \beta} \left( 1 + \frac{\beta^4}{20 S_2(\beta^4)} \right) &\quad \alpha = \beta^2 \end{aligned}$$

Das ergibt in 3:7, wenn wir noch die Winkelintegration ausführen:

$$3:8 \quad \Gamma = - \frac{2}{3\sqrt{2}\pi} \frac{V_t^2 \gamma \varepsilon^2}{\Theta^2 \Omega_0^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\partial n_0}{\partial r} \sqrt{\frac{r}{r_2}} \\ \int_0^\infty d\beta \, e^{-\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{r}{r_2}}} \left(1 + \frac{\beta^4}{20 S_2(\beta^4)}\right)$$

Der Diffusionskoeffizient ist definiert durch:

$$3:9 \quad \Gamma = -D \frac{\partial n_0}{\partial r}$$

D.h.

$$3:10 \quad D = \frac{2}{3\sqrt{2}\pi} \frac{V_t^2 \gamma \varepsilon^2}{\Theta^2 \Omega_0^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \sqrt{\frac{r}{r_2}} \\ \int_0^\infty d\beta \, e^{-\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{r}{r_2}}} \left(1 + \frac{\beta^4}{20 S_2(\beta^4)}\right)$$

### 3:2 Berechnung von $S_2$

Zur weiteren Auswertung von 3:8 bzw. 3:10 müssen wir  $S_2$  bestimmen.

Wir betrachten zunächst den Stoßdominierten Bereich. Dann ist

$\frac{v}{v_2} \gg 1$  und bei der  $\beta$ -Integration spielen nur Werte  $\beta \ll 1$  eine Rolle. Für kleine  $\beta$  können wir  $S_2$  durch den 0-ten Näherungsbruch approximieren. Mit  $S_2 = 1$  erhalten wir aus 3:8:

$$3:11 \quad \Gamma = - \frac{2}{3\sqrt{2}\pi} \frac{V_t^2 v \varepsilon^2}{\Omega_0^2 \Theta^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\partial n_0}{\partial r} \sqrt{\frac{v}{v_2}}$$

$$\cdot \int_0^\infty d\beta e^{-\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{v}{v_2}}} \left(1 + \frac{\beta^4}{20}\right)$$

Nun ist:

$$3:12 \quad \int_0^\infty d\beta e^{-\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{v}{v_2}}} \left(1 + \frac{\beta^4}{20}\right) = 2 \sqrt{\frac{v_2}{v}} + \frac{3 \cdot 2^6 \left(\sqrt{\frac{v_2}{v}}\right)^5}{5}$$

Außerdem gilt:

$$p_{\text{ges}} = p_o^i + p_o^e = n_o^i k T_i + n_o^e k T_e$$

$$= n_o m V_t^2 \left(1 + T_i/T_e\right)$$

Also

$$3:13 \quad \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\partial n_0}{\partial r} = \frac{1}{m V_t^2} \frac{\partial p_{\text{ges}}}{\partial r}$$

sowie: [9]

$$3:14 \quad \gamma = \frac{3}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^2 n_0}{m \tilde{\sigma}_1}$$

3:14, 3:13 und 3:12 in 3:11 ergeben für  $\Gamma$  im Bereich  $\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \gg 1$ :

$$3:15 \quad \Gamma = - \frac{c^2 n_0}{B_0^2 \tilde{\sigma}_1} 2 \frac{\xi^2}{\Theta^2} \frac{\partial P_{\text{ges}}}{\partial r} \left( 1 + \frac{96}{5} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots \right)$$

Der erste Term gibt genau den Pfirsch-Schlüter-Wert für die Diffusion im Stoßdominierten Bereich. [1] Er ist von der Ordnung  $-1$  in  $\sqrt{2}/\gamma$ . Der zweite Term ist von erster Ordnung in  $\sqrt{2}/\gamma$ . Das entspricht genau der physikalischen Vorstellung, denn zusätzlich zur Pfirsch-Schlüter-Diffusion, die mit Stößen nur übers Ohmsche Gesetz zu tun hat, erwarten wir einen zusätzlichen Beitrag auf Grund der radialen Verschiebung der Teilchen während ihres Umlaufs um den Torus. Da die Stoßfrequenz groß ist gegen die Umlauffrequenz  $\Theta/k/r$ , muß dieser Beitrag proportional  $1/\gamma$  sein.

Terme höherer Ordnung in  $\sqrt{2}/\gamma$  bekommt man, indem man  $S_2$  durch Näherungsbrüche entsprechend hoher Ordnung approximiert.

Als nächstes betrachten wir den Fall  $\gamma/\sqrt{2} \ll 1$ . In diesem Bereich kommt der Hauptbeitrag zum  $S$ -Integral von Werten  $S \gg 1$ . Wir haben die Funktion  $S_2$  ( $S^4$ ) mittels 2:44 numerisch berechnet. Der Verlauf und einige Werte sind in Anhang 1 angegeben. Man findet insbesondere:

$$3:16 \quad S_2(\beta^4) = \gamma \beta^2$$

$$\text{für } \beta \gg 1$$

Setzt man dies in 3:8 ein, so folgt mit

$$\int_0^\infty d\beta e^{-\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_2}}} \left(1 + \frac{\beta^4}{20 S_2}\right) \approx \int_0^\infty d\beta e^{-\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_2}}}$$

$$\frac{\beta^2}{20\gamma} = \frac{4}{5\gamma} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}$$

im Bereich  $\gamma/\gamma_2 \ll 1$  in 0-ter

Ordnung in  $\gamma/\gamma_2$ :

$$3:17 \quad \Gamma = -\frac{8}{15\sqrt{2}\pi} \frac{V_t^3}{\Omega_0^2 \theta R} \left(1 + \frac{T_L}{T_e}\right) \frac{\partial n_0}{\partial r}$$

Mit  $\gamma = 0,1698$  findet man  $\frac{8}{15\sqrt{2}\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  im Rahmen

der Rechengenauigkeit. Das ist der bekannte Wert für die Plateaudiffusion.

Wir haben bereits früher festgestellt, daß der eigentliche Plateaubereich, in dem Annahme 1 und 2 erfüllt sind, für hinreichend kleines  $\varepsilon$  und  $\gamma$  (und das heißt, weil  $\Gamma$  nicht explizit von  $\varepsilon$  abhängt,  $(\varepsilon/\theta = 2\pi/\omega \sim 1)$  für kleines  $\gamma$ ) miterfaßt wird. Da die

Vernachlässigung azimuthaler elektrischer Felder, wie wir gesehen haben, keine Rolle spielt, ist diese Übereinstimmung nicht überraschend.

Der Kettenbruch für  $S_2$  konvergiert sehr gut und kann daher leicht numerisch ausgewertet werden. Um  $\Gamma$  für beliebige Werte von  $\gamma$  zu bestimmen, haben wir den Kettenbruch  $S_2$  und das  $\beta$ -Integral numerisch berechnet.

Die folgende Tabelle gibt einige Werte für den Ausdruck I, definiert durch:

$$D = \frac{2}{3\sqrt{2}\pi} \frac{V_t^3 \varepsilon}{\Omega^2 R \Theta} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) I$$

$$I = \left(\frac{\gamma}{\gamma_2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty d\beta e^{-\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_2}}} \left(1 + \frac{\beta^4}{20 S_2}\right)$$

| $\gamma/\gamma_2$ | I     |
|-------------------|-------|
| 2 <sup>-7</sup>   | 4,71  |
| 2 <sup>-6</sup>   | 4,73  |
| 2 <sup>-5</sup>   | 4,75  |
| 2 <sup>-4</sup>   | 4,78  |
| 2 <sup>-3</sup>   | 4,86  |
| 2 <sup>-2</sup>   | 5,02  |
| 2 <sup>-1</sup>   | 5,36  |
| 2 <sup>0</sup>    | 6,09  |
| 2 <sup>1</sup>    | 7,67  |
| 2 <sup>2</sup>    | 11,09 |
| 2 <sup>3</sup>    | 18,38 |
| 2 <sup>4</sup>    | 33,64 |
| 2 <sup>5</sup>    | 65,00 |

Der Verlauf von I in Abhängigkeit von  $\gamma$  ist in Abb. 3 dargestellt.

I ( $\gamma$ ) wächst im ganzen Bereich monoton mit  $\gamma$ .

Für  $\gamma \ll \gamma_2$ , also im eigentlichen Plateaubereich ist der Anstieg sehr schwach.

Der Übergang vom Plateau- zum Pfirsch-Schlüter-Bereich ist ausgeprägt, wie bereits auf Grund des Verlaufs von  $S_2$  ( $\beta^4$ ) zu erwarten war.

An der Stelle  $\gamma_2$  ist D etwa auf das 1,3 fache des Wertes D ( $\gamma \rightarrow 0$ ) (eigentlicher Plateauwert) angestiegen.

I

$10^2$

$10^{1,5}$

$10^1$

Abb. 3

$\alpha^2 \approx 5$

$\frac{\gamma}{\gamma_0}$

100

10

1

0,1

0,01



#### 4: Zusammenfassung

Im Bananen- bzw. Stoßdominierten Bereich kann die kinetische Gleichung durch eine Entwicklung nach  $\gamma$  bzw.  $1/\gamma$  gelöst werden. Im Plateaubereich ist dies unmöglich, da die Umlauffrequenz der Teilchen, die zur Diffusion beitragen, sowohl größer als auch kleiner als die Stoßfrequenz sein kann. Aus diesem Grunde sind bei der Behandlung der Plateaudiffusion stets Zusatzannahmen gemacht worden, um die kinetische Gleichung zu vereinfachen.

Die beiden wichtigsten, die allen bisherigen Rechnungen zu Grunde liegen, sind:

- 1: Die Vernachlässigung gefangener Teilchen.
- 2: Die Annahme, daß nur Teilchen, die der Bedingung  $V_{II} \ll V_I$  genügen, zur Plateaudiffusion beitragen.

Beide Bedingungen schränken den Bereich der Stoßfrequenzen ein, für den die kinetische Gleichung gilt. Definiert man den Plateaubereich wie üblich durch  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ , ( $\gamma_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \gamma_2$ ;  $\gamma_2 = \theta k / r$ ) so impliziert Annahme 1 bzw. 2

$$\gamma \gg \gamma_1 \quad \text{bzw.} \quad \gamma \ll \gamma_2$$

Verlangt man eine Genauigkeit  $\delta$ , erfordert dies  $\gamma_1/\gamma \lesssim \delta$  und  $\gamma/\gamma_2 \lesssim \delta$ . Damit die beiden Bedingungen überhaupt verträglich sind, muß, wegen  $\gamma_1 = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \gamma_2$ ,  $\delta \gtrsim \varepsilon^{\frac{3}{4}}$  sein.

Damit ist folgende Situation gegeben:

Formal gesehen hat man, wenn man annimmt, daß  $\varepsilon$  sehr klein ist, so daß auch  $\delta \gg \varepsilon$  noch klein ist, einen eigentlichen Plateaubereich, der definiert ist durch  $\gamma_1/\delta \lesssim \gamma \lesssim \delta \gamma_2$  und in dem beide Bedingungen erfüllt sind, und die Übergangsbereiche  $\gamma_1/\delta \gtrsim \gamma$  und  $\delta \gamma_2 \lesssim \gamma$ , in denen jeweils eine der beiden Bedingungen erfüllt ist.

Bei realen Plasmen ist  $\varepsilon$  keine sehr kleine Größe. Es ist dann sinnvoll  $\delta \sim \varepsilon$  zu wählen. Dann zerfällt der Bereich in die beiden Übergangs-  
 -----  
 +  $\varepsilon^{-1} \sim 3-7$

bereiche.

Wir haben lediglich Annahme 1 gemacht. Die Rechnung umfasst also den eigentlichen Plateaubereich, den Übergang zum Stoßdominierten Bereich und den Stoßdominierten Bereich.

In diesem Gebiet lösen wir die Driftkinetische Gleichung unter Verwendung des Lorentzgas-Modells für den Stoßterm. Selbstkonsistente elektrische Felder werden exakt berücksichtigt.

Wir finden eine analytische Darstellung für den Diffusionskoeffizienten mittels einer Funktion  $S_2$ .  $S_2$  ist als Kettenbruch gegeben, der in Grenzfällen analytisch und für beliebige  $\gamma$  leicht numerisch ausgewertet werden kann.

$D(\gamma)$  wächst im gesamten Bereich monoton mit  $\gamma$ .

Im Gebiet  $\gamma \gg \gamma_2$  (Stoßdominierter Bereich) erhalten wir in niedrigster Ordnung in  $1/\gamma$  den Pfirsch-Schlüter-Wert.

Im Gebiet  $\gamma \ll \gamma_2$  (eigentliches Plateaugebiet) finden wir in 0-ter Ordnung in  $\gamma$  den üblichen Plateauwert. In diesem Bereich steigt  $D(\gamma)$  nur sehr schwach an.

Der Übergang zum Stoßdominierten Bereich ist ausgeprägt. So ist z.B.  $D(\gamma_2)/D(\gamma \rightarrow 0) \approx 1,3$

Der Diffusionsstrom wird teils durch den Druckgradienten, teils durch das azimutale elektrische Feld getrieben. Das azimutale elektrische Feld kommt in dem Endausdruck für  $D$  nicht mehr vor. Es muß daher nicht extra bestimmt werden.

Im Vergleich zu bisherigen Rechnungen haben wir folgende Situation: Im Stoßdominierten Bereich besteht volle Übereinstimmung mit früheren Rechnungen in niedrigster Ordnung in  $1/\gamma$ . Terme höherer Ordnung sind noch nicht berechnet worden.

Der Übergangsbereich ist ebenfalls noch nicht berechnet worden, so daß keine Vergleichsmöglichkeiten gegeben sind.

Im eigentlichen Plateaubereich finden wir in 0-ter Ordnung in  $\gamma$

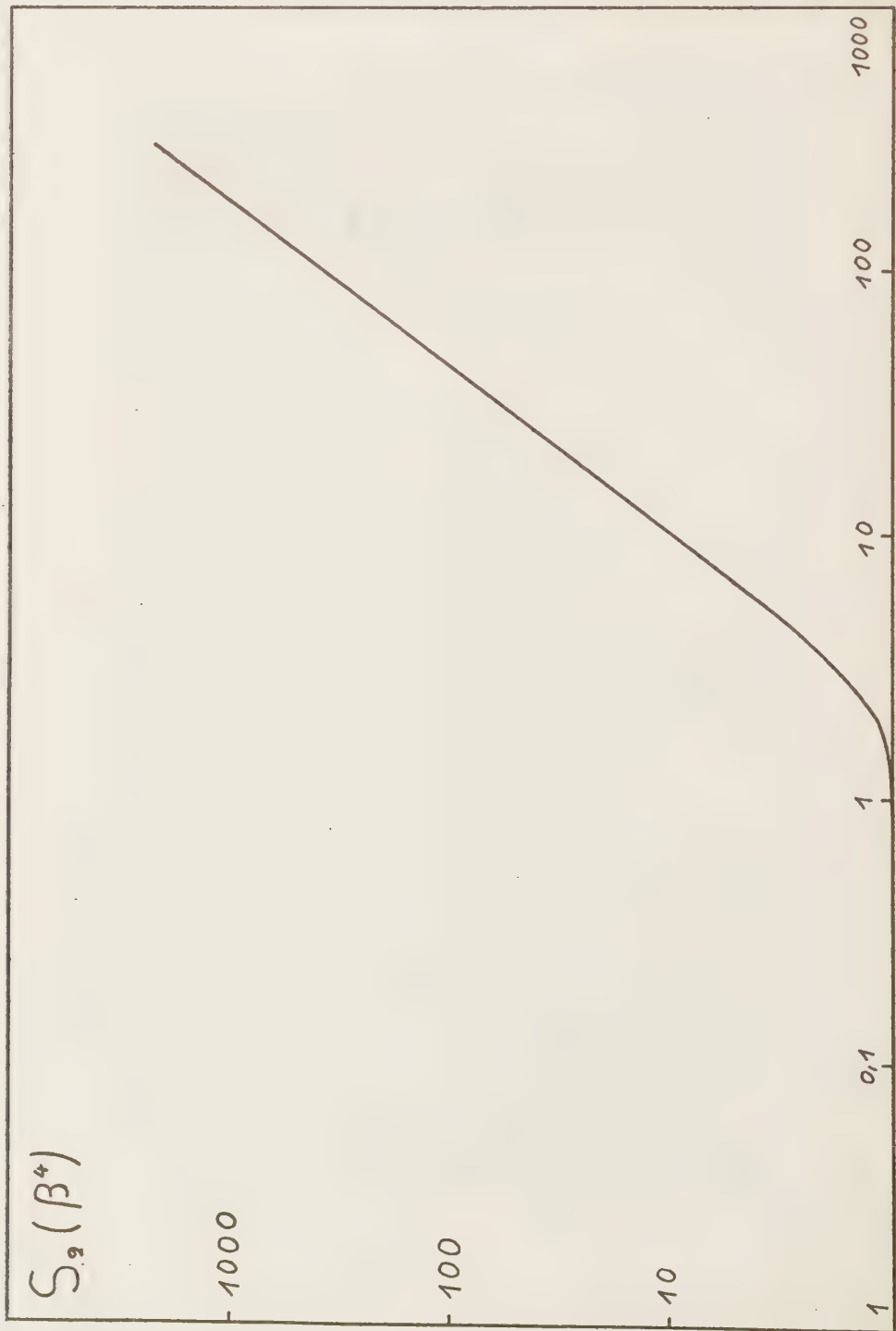
Übereinstimmung mit früheren Rechnungen. Das ist plausibel, da, wie wir gesehen haben, die Vernachlässigung azimuthaler elektrischer Felder sich nicht auswirkt.

Korrekturen erster Ordnung in  $\gamma$  sind in [6] für den eigentlichen Plateaubereich berechnet worden. Sie ergeben, abweichend von unserem Resultat, einen leicht abfallenden Verlauf von  $D$  in diesem Bereich. Wir führen diese Diskrepanz auf das in [6] benutzte Lösungsverfahren zurück.

A 1: Numerische Berechnung von  $S_2$  ( $B^4$ )

In der folgenden Tabelle geben wir einige Werte der Funktion  $S_2$  an, die wir durch numerische Auswertung der Kettenbruchdarstellung von  $S_2$  erhalten haben. Die graphische Darstellung (in doppelt logarithmischer Form) findet sich auf der nächsten Seite.

| B   | $S_2$   | $S_2/B^2$ |
|-----|---------|-----------|
| 1   | 1,0142  | 1,0142    |
| 2   | 1,2144  | 0,3036    |
| 4   | 3,0378  | 0,1899    |
| 6   | 6,4140  | 0,1782    |
| 8   | 11,1610 | 0,1744    |
| 10  | 17,2697 | 0,1727    |
| 20  | 68,195  | 0,1705    |
| 30  | 153,07  | 0,1701    |
| 40  | 271,91  | 0,1699    |
| 50  | 424,70  | 0,1698    |
| 60  | 611,44  | 0,1698    |
| 80  | 1086,8  | 0,1698    |
| 100 | 1697,9  | 0,1698    |
| 140 | 3327,7  | 0,1698    |
| 180 | 5500,7  | 0,1698    |
| 200 | 6790,9  | 0,1698    |
| 300 | 15279   | 0,1698    |
|     |         |           |



# Literaturverzeichnis:

- 1) D. Pfirsch und A. Schlüter  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik Report MPI/PA/7/62  
(1962)
- 2) A.A. Galeev und R.Z. Sagdeev  
Soviet Physics JETP Vol. 26 Nr. 1/233 (1968)
- 3) T.E. Stringer  
Phys. Rev. Letters Vol. 22 Nr. 15,770 (1969)
- 4) P.H. Rutherford  
The Phys. of Fluids Vol. 13 Nr. 2, 482 (1970)
- 5) T.E. Stringer  
The Phys. of Fluids Vol. 13 Nr. 3, 810 (1970)
- 6) K. Dilip, D.K. Bhadra, C.S. Liu und T. Ohkawa  
The Physics of Fluids Vol. 15 Nr. 7, 1338 (1972)
- 7) C.T. Dum und D. Pfirsch  
Nuclear Fusion 12, 297 (1972)
- 8) A.H. Glasser und W.B. Thompson  
The Physics of Fluids Vol. 16 Nr. 1, 95 (1973)
- 9) S.Braginski in Reviews of Plasma Physics Vol. 1 Herausg. M.A.Leontovich  
(1965)
- 10) C.T. Dum  
Transport Processes in a Plasma  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik Report IPP 6/99
- 11) D.V. Sivukhin in Reviews of Plasma Physics Vol.1 Herausg. M.A.Leontovich  
(1965)
- 12) F.L. Ince  
Ordinary Differential Equations  
New York (1956)
- 13) E.W. Hobson  
The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics  
Cambridge (1931)
- 14) O. Perron  
Die Lehre von den Kettenbrüchen Band 1/2 Stuttgart (1954/1957)
- 15) V.D. Shafranov  
Nuclear Fusion 3, 183 (1963)



Ich danke Herrn Professor D. Pfirsch für  
die Anregung des Themas und zahlreiche  
kritisch hilfreiche Diskussionen  
sowie

Herrn G. Hocke für seine Unterstützung  
bei der Ausführung der numerischen Rech-  
nungen und Fr. M. Bertlein für die sorg-  
fältige Erstellung des Manuskripts.



## Lebenslauf

Am 7.7.1943 wurde ich als zweites Kind des Dr. Kurt Borraß und der Dr. Erna Borraß geb. Küllmer in Recklinghausen geboren.

Seit 1950 besuchte ich eine zweiklassige Volksschule, von der ich nach Abschluß des vierten Schuljahres in das Kittorf-Gymnasium in Recklinghausen eintrat, das ich bis zur Abiturprüfung 1963 besuchte.

Im Sommersemester 1963 begann ich mit dem Studium der Physik an der Universität Hamburg. Nachdem ich im Wintersemester 1965/66 die Diplomvorprüfung für Physik abgelegt hatte, setzte ich im Sommersemester 1966 das Studium an der Ludwig-Maximilians-Universität München fort. 1968 begann ich mit einer theoretischen Diplomarbeit aus dem Gebiet der Quantenelektrodynamik. Die Diplomhauptprüfung für Physik habe ich im Dezember 1970 an der Ludwig-Maximilians-Universität München abgelegt. Im April 1971 habe ich im Max-Planck-Institut für Plasmaphysik mit einer Dissertation über Neoklassische Diffusion in toroidalen Plasmen begonnen.





